Aufgabe 1:

$$\nearrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

a) Potenzreihenansatz. Es eignet sich $x_0 = 0$ als Entwicklungspunkt, da $f(0)$ und $f'(0)$ gegeben sind.

Aus Taylor ergibt sich

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} = \frac{f(0)}{1} = 1$$

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1} = 1$$

b)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-\underset{=0}{x_0})^{n-1}$$

$\leftarrow$ gliedweise ableiten

$$\Rightarrow x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n\, x^n$$

gliedweise ableiten

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-x_0)^{n-2}$$

c)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$x f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n$$

$\leftarrow$ (da für $n=0$ der Summand eh 0 ist, kann die Reihe bei $n=0$ beginnen)

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

d) Aus der DGL folgt:

$$2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n}_{f''} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n}_{xf'} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(2a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n n + a_n\right)x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n(n-1) = 0 \qquad \forall_{n\geq 0}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{a_n(n-1)}{2(n+2)(n+1)}$$

e)

$$a_2 = a_{0+2} = \frac{a_0(0-1)}{2(0+2)(0+1)} = \frac{-1}{4}$$

$$a_3 = a_{1+2} = \frac{a_1(1-1)}{2(1+2)(1+1)} = 0$$

Aufgabe 2:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

a) $\underline{a_0} = f(x_0) = \underset{x_0 = 1}{f(1)} = \underline{0}$ ← Anfangsbedingungen

$$e^{f(1)} \cdot f'(1) = 1$$

$$\Rightarrow e^0 \cdot f'(1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = \underline{1 = a_1}$$

b) $\frac{d}{dx} \left(e^f f' = 1 \right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{e^f \cdot f'}_{\text{Kettenregel}} \cdot f' + e^f \cdot f''}_{\text{Produktregel}} = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx} 1$$

c) $\Leftrightarrow \underbrace{e^0 \cdot 1 \cdot 1}_{=1} + e^0 \cdot f''(1) = 0 \quad \Rightarrow f''(1) = -1$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{f''(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

d) $\frac{d}{dx}\left(e^f (f')^2 + e^f f'' = 0\right)$

$$\Rightarrow e^f (f')^3 + 2e^f f' f'' + e^f f' f'' + e^f f''' = 0$$

$$\underbrace{e^0 \cdot 1^3}_{1} + \underbrace{2 \cdot e^0 \, 1 \cdot (-1)}_{-2} + \underbrace{e^0 \cdot 1(-1)}_{-1} + e^0 f''' = 0$$

$$\Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = \frac{1}{3}$$

Aufgaben 3 + 4 sind nicht relevant!

Aufgabe 3 wurde bereits in der Vorlesung Nr. 10 besprochen!