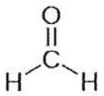
FU Berlin: SoSe 2018 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 2, Abgabe 02.05.2018

Lernziel: Wissen, was eine Gruppe (ein Körper) ist und verstehen, warum man *alle* Gruppen-(Körper-)Eigenschaften benötigt, um einfache (lineare) Gleichungen zu lösen. Distributivgesetz (z.B. binomische Formeln) anwenden können, um aus Summen Produkte oder aus Produkten Summen zu machen. Mathematische Terme umformen können.

Aufgabe 1: (Symmetriegruppen)

Formaldehyd hat folgende Lewis-Formel:



a) Formaldehyd hat eine bestimmte Molekül-Symmetrie. Diese Symmetrie wird in Form einer Symmetriegruppe mit einer entsprechenden Verknüpfungstafel (Hintereinanderausführen der Symmetrieoperationen) ausgedrückt. Füllen Sie die Verknüpfungstafel vollständig aus:

+	1	s_h	s_v	d_{180}
1	1	s_h	s_v	d_{180}
s_h	s_h	1	d_{180}	s_v
s_v	s_v	d_{180}	1	s_h
d_{180}	d_{180}	s_v	s_h	1

(1=Identität, s_h=Spiegelung an der "Papierebene", s_v=Spiegelung an der Ebene, die orthogonal zum Papier verläuft, d_{180}=Drehung um 180° mit Drehachse entlang der C=O-Bindung)

← „Sudoku" spielen liefert die Lösung (Diagonale ist "1")
^ Herausfinden

b) Ist die entstandene Symmetriegruppe abelsch? Begründen Sie! ←

Ja, es gilt das Kommutativgesetz. Die Verknüpfungstafel ist symmetrisch zur Diagonalen

c) Lösen Sie die Gleichung $s_h + x = s_v$ durch Umformung nach x auf. Schreiben Sie bei jedem Schritt der Umformung auf, welche Eigenschaft einer Gruppe Sie dabei verwendet haben. Wo verwenden Sie das Assoziativgesetz?

$s_h + x = s_v$ | von links $(-s_h)+$ (ex. Inverse)

$(-s_h) + (s_h + x) = (-s_h) + s_v$ | Assoziativgesetz

$(-s_h + s_h) + x = (-s_h) + s_v$ | neutrales Element, Eigenschaft der Inversen

$1 + x = (-s_h) + s_v$ | Eigenschaft d. neutr. Elements

$x = (-s_h) + s_v$ | Nachschauen, dass $-s_h = s_h$ (da $s_h + s_h = 1$)!

„welches Element verknüpft mit s_h ergibt 1?"

$x = s_h + s_v = d_{180}$

Nachschauen

Aufgabe 2 a)   ausführlicher Rechenweg

$[2]\cdot x + [1] = [2] + x\cdot[3]$ | Kommutativgesetze

$\Leftrightarrow [2]\cdot x + [1] = [3]\cdot x + [2]$ | von rechts $+[-1]$

$\Leftrightarrow ([2]\cdot x + [1]) + [-1] = ([3]\cdot x + [2]) + [-1]$ | Ass. Ges. der Addition

$\Leftrightarrow [2]\cdot x + ([1] + [-1]) = [3]\cdot x + ([2] + [-1])$ | $[-1] = [1]$ Inverses der Addition

$\Leftrightarrow [2]\cdot x + [0] = [3]\cdot x + [3]$ | neutr. El. der Add.

$\Leftrightarrow [2]\cdot x = [3]\cdot x + [3]$ | von links $-([3]\cdot x)+$

$\Leftrightarrow -([3]\cdot x) + [2]\cdot x = -([3]\cdot x) + ([3]\cdot x + [3])$ | Ass. Ges. der Add.

$\Leftrightarrow -([3]\cdot x) + [2]\cdot x = (-([3]\cdot x) + [3]\cdot x) + [3]$ | Neutr. El. der Add.

$\Leftrightarrow -([3]\cdot x) + [2]\cdot x = [3]$ | Additiv Inverse von $[3]\cdot x$ ist wegen der Ass. Ges. der Multiplikation $(-[3])\cdot x$

$\Leftrightarrow -[3]\cdot x + [2]\cdot x = [3]$

$\Leftrightarrow [3]\cdot x + [2]\cdot x = [3]$ | Distributivgesetz

$\Leftrightarrow \underbrace{([3] + [2])}_{[1]}\cdot x = [3]$ | $[1]$ = neutrales Element d. Mult.

$[1] \cdot x = [3]$

$\Leftrightarrow x = [3]$

Aufgabe 2/b) verkürzter Rechenweg

$$x + [2] = [2] \cdot x \quad \Big| + (-[2]) \;\; + (-([2]\cdot x)) \quad \Big| \text{ neutrale Elemente}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + (-([2]\cdot x)) = -[2]$$

$$\Leftrightarrow \quad x + (-[2])\cdot x = -[2] \quad \Big| -[2] = [2]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{x} + [2]\cdot x = [2] \quad \Big| [1]\cdot x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad [1]\cdot x + [2]\cdot x = [2] \quad \Big| \text{ Distributiv}$$

$$\Leftrightarrow \quad ([1] + [2])\cdot x = [2] \quad \Big| [1] + [2] = [3]$$

$$\Leftrightarrow \quad [3]\cdot x = [2] \quad \Big| \cdot [3]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = [3]^{-1}\cdot [2] \quad \Big| [3]^{-1} = [2]$$

$$\Leftrightarrow \quad x = [2]\cdot[2] = \underline{\underline{[3]}}$$