Aufgabe 1

a) $z = 2+4i \quad , w = 3-i$

$$z+w = (2+3)+(4-1)i = 5+3i$$
$$z-w = (2-3)+(4+1)i = -1+5i$$
$$z\cdot w = (2+4i)\cdot(3-i) = 2\cdot 3 + 4i\cdot 3 - 2\cdot i - 4\cdot i\cdot i$$
$$= 6 + 12i - 2i + 4 \qquad (i^2=-1)$$
$$= 10+10i$$
$$\frac{z}{w} = \frac{2+4i}{3-i} = \frac{(2+4i)(3+i)}{(3-i)\ (3+i)} \underset{\uparrow}{=} \frac{2+14i}{9+1} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

ausführlicher!

$z = 2e^{i\pi/3} \quad w = \frac{1}{2}e^{i\pi/2}$

Umrechnen in kartesische Koordinaten:

$$z = 2\cdot e^{i\pi/3} \underset{\text{Euler}}{=} 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1+\sqrt{3}\,i$$

$$w = \frac{1}{2}e^{i\pi/2} \underset{\text{Euler}}{=} \frac{1}{2}i$$

$\frac{\pi}{2} = 90°$

= Imaginäre Achse!

$(\cos = 0,\ \sin = 1)$

Jetzt wieder wie oben $z+w$, $z-w$, $z\cdot w$ und $\frac{z}{w}$ rechnen!

$z+w = 1+\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)i \qquad z-w = 1+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)i$

$z\cdot w = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{z}{w} = \frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)}{\frac{1}{2}i \quad \cdot\left(-\frac{1}{2}i\right)} = \frac{-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2i+2\sqrt{3}$

$i^2=-1$

b) $w^3 = \frac{8\sqrt{3}}{2} + 4i$

rechte Seite in Polarkoordinaten:

$r = \text{Betrag} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{3 \cdot 16 + 16} = \sqrt{64} = 8$

$\alpha = \text{Argument} = \operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi$

$\left(\frac{8\sqrt{3}}{2} : r\right)$

Vorzeichen positiv, da 4 positiv ist

Wurzel berechnen:

$\sqrt[3]{w} = \left\{ \sqrt{8} \cdot e^{\frac{2\pi k + \alpha}{3}} ; k = 0, 1, 2 \right\}$

$= \left\{ 2e^{\frac{\pi}{18}}, 2e^{\frac{13}{18}\pi}, 2e^{\frac{25}{18}\pi} \right\}$

c) $2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$

siehe Teil a

Betrag = 2 Realteil = 1 Imaginärteil = $\sqrt{3}$

konjugiert komplex: $1 - \sqrt{3}i$

$\frac{2+4i}{3-i} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

Teil a)

Realteil = $\frac{1}{5}$ Imaginärteil = $\frac{7}{5}$

$\text{Betrag} = \sqrt{\frac{1}{5}^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{49}{25}} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$

konjugiert komplex $= \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

Aufgabe 2

Es soll gelten

$$e^w = \sqrt{3} - i$$

also mit $w = x + iy$ gilt:

$$e^w = e^x e^{iy} = \sqrt{3} - i$$

$\Rightarrow$ e^x ist der Betrag von $\sqrt{3} - i$ $\Rightarrow$

$$x = \ln(|\sqrt{3} - i|) = \ln\left(\sqrt{3+1}\right) = \ln(2)$$

---

und es gilt: y ist das Argument von $\sqrt{3} - i$,

weil $\underbrace{e^x}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{\text{Argument}} = \sqrt{3} - i$

Realteil

$$y = \operatorname{acos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \operatorname{sign}(-1) = -\frac{\pi}{6}$$

Betrag

Imaginärteil

$$w = x + iy = \ln(2) + i \cdot \left(2\pi k - \frac{\pi}{6}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vielfache von 2π ändern den Winkel nicht!

Aufgabe 3:

Kreis mit Mittelpunkt $m = 1 + 0i$

und Radius $r = 1$

Formel 1: $(x-1)^2 + y^2 = 1$

Formel 2: $|z - 1| = 1$

Formel 3: $z = 1 + e^{i\alpha}$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$

Probieren $e = -1$, $f = 1$, $g = 0$ $\Rightarrow \bar{f} = 1$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{-1} = 1 \quad \checkmark$$

$$r = \frac{\sqrt{1 - 0}}{|1|} = 1 \quad \checkmark$$

also

Formel 4: $-z\bar{z} + \bar{z} + z = 0$

Aufgabe 4

a) zu zeigen, dass Δabc mit

$$a = -i, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

gleichseitig: $\Leftrightarrow$

$$\underset{a}{-i} + \underset{b}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{=\omega} + \underset{c}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}_{=\omega^2} \overset{!}{=} 0$$

ausrechnen

lässt sich leicht nachrechnen

b) Um 90° drehen ist das Gleiche, wie mit

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ multiplizieren.

aus Umrechnung (Euler formel)

also: $a' = 1$, $b' = \frac{1}{\sqrt{3}}i$, $c' = -\frac{1}{\sqrt{3}}i$

dann wieder in Formel einsetzen ..

c) Spiegeln an x-Achse ist das Gleiche, wie komplex konjugieren, also:

$$a' = i, \quad b' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

dann wieder in Formel einsetzen, aber b' und c' vertauschen (damit mathematisch positiver Sinn)