## Aufgabe 1:

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x_n^2} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{2}{x_n^2}\right)$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}(1+2) = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}\left(2+\frac{2}{4}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{10}{4} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3} + \frac{2}{\frac{25}{9}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{3} + \frac{18}{25}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{125+54}{75}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{179}{75}\right) = \frac{358}{225}$$

$$x_0 = i \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}\left(i + \frac{2}{-1}\right) = \frac{2}{3}i - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x_2 = \ldots \text{ (Taschenrechner!)}$$

---

## Aufgabe 2:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 4\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) + 4\cdot\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$

$$= 0 + 4\cdot\cos(0) = 4$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(n)}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\ln(n)}}_{\text{Nullfolge}} = 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = 1$$

d) $(a_{n+1})$ konvergiert auch gegen a

$$a = \frac{2}{a^2+1}$$

$\Leftrightarrow \quad a^3+a=2$

$\Leftrightarrow \quad a^3+a-2=0$

$a_1=1$ ist eine mögliche Nullstelle des Polynoms und daher ein Fixpunkt der Iteration.

Horner-Schema

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | -2 |
| $a_1=1$ | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |

$\Rightarrow \quad a^3+a-2=(a-1)\cdot(a^2+a+2)$

$$a_{3/4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}} = -1 \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$a_1$ ist der einzige reelle Fixpunkt und bei einem reellen Anfangswert der einzig mögliche Grenzwert. Wenn $a_n$ reell ist, ist auch $a_{n+1}$ reell!

## Aufgabe 3:

b) $\phi(x) \in [0;1]$, wenn $x \in [0;1]$, da

$\ln(2-x^2)$ ist monoton fallend und

$\ln(2-1^2)=0$

$\ln(2-0^2) \approx 0{,}69 < 1$

$1 = \frac{2x}{(x^2-2)} \iff x^2-2 = 2x$

„keine Probleme" in $[0;1]$ $\iff x^2-2x-2=0$

$\iff x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+2}$

$= 1 \pm \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ beide Lösungen liegen außerhalb von $[0;1]$

$\Rightarrow$ eindeutiger Fixpunkt im Intervall $[0;1]$

# Übung 4

## Aufgabe 4)

...

**a-priori-Fehlerschätzung**

*gegeben:* $q = \frac{1}{7}; x_0 = 0.75; x_1 = 0.5$

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1| \leq \frac{1}{10^5}$$

$$\Rightarrow |x_n - \tilde{x}| \leq \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}}|0.75 - 0.5| \leq \frac{1}{10^5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^n \frac{7}{6}\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{7}\right)^n \frac{7}{24} = \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} \frac{1}{24} \leq \frac{1}{10^5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} \leq \frac{24}{10^5}$$

Anmerkung: Beim logarithmieren mit dem dekadischen oder dem natürlichen Logarithmus bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten. Es dreht sich jedoch um, wenn die Basis vom Logarithmus kleiner als 1 ist!

$$\Rightarrow n - 1 \geq \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{24}{10^5}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1 + \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{24}{10^5}\right) \simeq 5.262$$

$\Rightarrow$ Es werden maximal 6 Schritte benötigt.