Aufgabe 1)

Sie können die Webseite

www.cymath.com

verwenden, um dort die Ableitungen der Funktionen schrittweise rechnen zu lassen.

In der Webseite geben Sie z. B. an:

differentiate x^k/k!

Überprüfen Sie stets, ob die Gleichung stimmt. Manchmal ist cymath bei dem Vereinfachen der Ausdrücke nicht so „schlau". Zur Überprüfung hier die Lösungen:

a) $\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ ← k ist eine Konstante

b) $2x + e^x$

c) $2\underset{\text{äußere}}{\sin(x)} \cdot \underset{\text{innere}}{\cos(x)}$ ← Kettenregel (innere mal äußere Ableitung)

d) $2xe^x + x^2e^x$ ← Produktregel

e) $\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ ← Quotientenregel (alternativ: Produkt und Kettenregel kombinieren)

f) wie e) da konstante Summanden „wegfallen"

g) $\cos^2(x) - \sin^2(x)$ ← Produktregel

h) $\frac{1}{\cos^2(x)}$ $(\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1)$

i) $2yx$ ← y ist eine Konstante

k) $x^x(\ln(x) + 1)$ ← cymath

Aufgabe 2

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_n - x_{n+1})\, f'(x_n) = f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

$$f(x) = x^3 - 2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 2}{3x^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2}{3x^2}$$

$$= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x^2} \quad \text{(Zauberformel)}$$

$$\Phi(0) = 1{,}5 \qquad \Phi(1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{3 \cdot \frac{9}{4}} = 1 + \frac{8}{27} \approx 1{,}2963$$

$$\Phi(2) = \frac{2}{3} \cdot 1{,}2963 + \frac{2}{3 \cdot (1{,}2963)^2} \approx 1{,}2609$$

wahrer Wert $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$

Aufgabe 3

mit $f(x) = x^2 + x$

a) $K_{rel} = \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} x_0 \right| = \left| \frac{2x_0+1}{x_0^2+x_0} \cdot x_0 \right|$

$$= \left| \frac{2x_0+1}{x_0+1} \right|$$

b) Der relative Fehler war jeweils 0,02.

Dieser wird verstärkt durch K_{rel}

Messung 1: $K_{rel} = \left| \frac{2 \cdot 0{,}5 + 1}{0{,}5+1} \right| = \left| \frac{2}{1{,}5} \right| = \frac{4}{3}$

Ergebnis $f(x)(1 \pm K_{rel} \cdot 0{,}02)$

$$= f(0{,}5)(1 \pm 0{,}026) \approx \underline{\underline{0{,}75(1 \pm 0{,}03)}}$$

für andere Messungen analog

c) Die letzte Messung!

d) $K_{abs} = |f'(x_0)|$

Aufgabe 4:

Schauen Sie sich den Link zu den „hyperreellen Zahlen" auf meiner Webseite an. Auf Seite 12 wird die Ableitung von sin(x) und von cos(x) erklärt.