FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 7, Abgabe 05.06.2019

Lernziele: Regel von de L'Hospital für verschiedene Grenzwertberechnungen anwenden können, die sich nicht durch einfache Rechengesetze ermitteln lassen. Für eine Funktion das Taylor-Polynom beliebigen Grades in verschiedenen Entwicklungspunkten ausrechnen können. Die Restglieddarstellung von Lagrange kennen.

Aufgabe 1: **(Regel von de L'Hospital)**

Nehmen wir an, Sie wollten feststellen, was der Grenzwert des Ausdrucks

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$$

ist, wenn also x gegen 1 strebt. Zum Beispiel probieren Sie ein einfaches Einsetzen von x=1. Leider ergeben Zähler als auch Nenner in diesem Falle 0. Und $\frac{0}{0}$ lässt sich nicht bestimmen. Wir könnten jedoch den genialen Einfall haben, umzuformen:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x+2}{x+1}.$$

In diesen Ausdruck lässt sich x=1 einsetzen. Es gilt:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Nur leider findet man solche genialen Umformungen nicht immer einfach. Für diesen Fall hat de L'Hospital eine einfache Regel entwickelt. Wenn Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

bestimmen wollen UND sowohl $f(x_0)=0$ als auch $g(x_0)=0$ gilt, dann kann man den Grenzwert auch anders bestimmen, nämlich über

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

In unserem Beispiel:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(x^2+x-2)}{\frac{d}{dx}(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Berechnen Sie mit der oben beschriebenen Methode die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Für Interessierte gibt es hier noch den Beweis zu de L'Hospital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)}{g(x_0+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)} = \frac{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}}{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x_0+\varepsilon)-g(x_0)}{\varepsilon}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

wobei ausgenutzt wird, dass $f(x_0) = 0$ *als auch* $g(x_0) = 0$ *gilt.*

Aufgabe 2: **(Regel von de L'Hospital, Übertragung auf andere Fälle)**

Durch den Ansatz

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) : \frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{h(x)}$$

und durch den Ansatz

$$f(x) - g(x) = 1 : \frac{1}{f(x)} - 1 : \frac{1}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} = \frac{h(x)}{k(x)}$$

kann man u.U. Ausdrücke so umformen, dass Nenner und Zähler Nullfolgen sind. So kann man mit der Regel von de L'Hospital auch folgende Grenzwerte ausrechnen:

a) $\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

Aufgabe 3: (Taylor-Polynom)

Sie haben bereits im fünften Übungszettel in Aufgabe 2 gesehen, dass man die Ableitung verwenden kann, um eine Gerade zu konstruieren (Tangente), die eine gegebene Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 approximiert. Es gilt

$$f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Eine Gerade/Tangente t(x) ist so etwas wie ein "Polynom zum Grad 1". Will man eine Funktion in der Nähe von x_0 (Entwicklungspunkt) durch ein höheres Polynom vom Grad n approximieren, so verwendet man z.B. Taylor-Polynome $t_n(x)$. Es gilt:

$$f(x) \approx t_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f ist.

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $t_4(x)$ zum Grad 4 der Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$, indem Sie als Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ wählen.

b) Berechnen Sie $t_4(0.5)$ für die Näherung aus Aufgabe a) und vergleichen Sie die Näherung mit dem wahren Funktionswert $f(0.5)$.

c) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von $f(x) = \ln(x)$ an dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 4: (Restglied von Lagrange)

Schreiben Sie für beide Taylor-Entwicklungen aus Aufgabe 3 die entsprechende Restgliedabschätzung von Lagrange auf.

Viel Erfolg!