Aufgabe 1:

a) $a_n = n e^{-n} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{n\, e^{-n}}\right|$

$= \left|\frac{n+1}{n} \cdot e^{-1}\right| \leq \frac{2}{e} \approx 0{,}74 < 1$

das ist für ausreichend große n kleiner als 2

das ist kleiner als $\frac{1}{2}$

Q-Kriterium erfüllt

b) $a_n = \frac{n^2}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{n \to \infty} 1$

d.h. irgendwann ist der Ausdruck kleiner als $\left(1{,}1 \cdot \frac{1}{2}\right) < 1$

c) das ist einfach

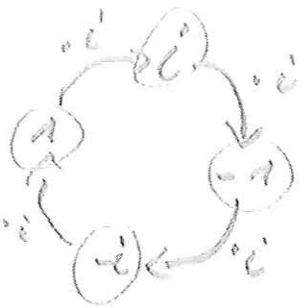
d) $a_n = \frac{1}{n^2} \quad a_{2^k} = \frac{1}{(2^k)^2} \quad a_{2^k} \cdot 2^k = \frac{1}{2^k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} < \infty$$

$\Rightarrow$ Verdichtungskriterium erfüllt

Aufgabe 2

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot x^n}{n!}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

für gerade Potenzen

für ungerade Potenzen

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

Aufgabe 3

nachschauen! Aber nicht merken..

Aufgabe 4

a) $\cancel{r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

b) $a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(1) = \frac{1}{n!}\left(n!\, 1^{-(n+1)} \cdot (-1)^n\right)$

$= (-1)^n$

$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| = \underline{1}$

Die Taylor-Entwickl. konvergiert im Kreis um den Punkt 1 mit Radius 1

x_0 r