FU Berlin: SoSe 2019 (Mathematik 1, Weber)

Übungszettel Nr. 9, Abgabe 19.06.2019

Lernziele: Erste und zweite partielle Ableitungen bilden können, das totale Differential (erster und zweiter Ordnung) ausrechnen können, den Satz von Schwarz kennen, sowie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen implizite Ableitungen bilden können.

Aufgabe 1: (Partielle Ableitungen / Totales Differential)

Bilden Sie das totale Differential erster und zweiter Ordnung von den Funktionen

a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{c}$

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - cos(y)$

c) $f(x,y) = ln(x+y)\, cos(xy)$

Aufgabe 2: (Satz über implizite Funktionen)

Ermitteln Sie die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ der folgenden Funktionen, mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen:

a) $x^3 + y^3 + 2 = 0$

b) $xy + y^2 + \ln(y) = 0$

Aufgabe 3: (Thermodynamik)

Berechnen Sie aufgrund der folgenden Van-der-Waals-Gleichung (a, b sind gegebene Parameter, R eine Naturkonstante) den Ausdruck $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0.$$

Aufgabe 4: (Eulersche Kettenformel)

Die Nomenklatur für partielle Ableitungen ist in der Physikalischen Chemie etwas anders als in der Mathematik. Lernen Sie z.B. Physikalische Chemie nach Peter W. Atkins, dann lernen Sie dort vor allem 4 Formeln kennen, auf deren Basis Sie alle

Beziehungen zwischen den thermodynamischen Größen herleiten werden. Diese Formeln wirken auf den ersten Blick vielleicht neu. In Wirklichkeit ist eine Formel aber einfaches Kalkül (wie bei der Substitution oft verwendet), hinter einer anderen "verbirgt" sich das totale Differential (aber durch dx geteilt). Eine Formel formuliert den Satz von Schwarz. Eine andere Formel entspricht der "impliziten Differentiation". Überlegen Sie, welche der folgenden Formeln damit jeweils gemeint sind (alle stammen aus dem Lehrbuch "Physikalische Chemie" von Atkins):

Formel 1: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$

Formel 2 (Inverter): $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}$

Formel 3 (Permuter): $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

Formel 4: Es lässt sich prüfen, ob df ein Vollständiges Differential ist. df = g dx + h dy ist vollständig bzw. exakt, wenn $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_y$. Wenn df ein vollständiges Differential ist, dann ist sein Integral zwischen vorgegebenen Grenzen vom Weg unabhängig.

Leiten Sie mit Hilfe der ersten drei Formeln die Eulersche Kettenformel her:

$$-1 = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y.$$

Diese Formel ist ein Beispiel dafür, dass man mit partiellen Ableitungen nicht unbedingt so rechnen kann wie mit hyperreellen Zahlen.

Viel Erfolg!