FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 12, Abgabe 28.01.2020 um 8:00 Uhr

Lernziele: Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, Fourier-Transformation

---

Aufgabe 1: (Wiederholung: Exakte Differentialgleichungen)

Wir wollen die Differentialgleichung

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \; e^{-y}\,dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$$

lösen.

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung für die spezielle Wahl von P und Q exakt ist.

b) Integrieren Sie $P(x,y) = e^{-y}$ nach x. Sie erhalten die gesuchte Funktion $U(x,y) = \int e^{-y}dx + c(y)$ mit einer Integrationskonstanten, die (nur) noch von y abhängt.

c) Um $c(y)$ zu finden, leiten Sie $U(x,y)$ nach y ab und vergleichen das Ergebnis mit $Q(x,y) = 1 - xe^{-y}$. Sie erhalten daraus eine Differentialgleichung für $c(y)$, die Sie einfach lösen können.

d) Die obige Differentialgleichung bedeutet, dass $U(x,y)$ eine Konstante sein muss, also $U(x,y) = c$. Lösen Sie die Gleichung mit dem, was Sie für $U(x,y)$ gefunden haben, nach x *oder* nach y auf.

Aufgabe 2: (Berechnung eines wegunabhängigen Kurvenintegrals)

Mit Hilfe von Aufgabe 1 wird jetzt klar, wie ein Kurvenintegral der Form $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ zu lösen ist. Dieses wird auch als "Kurvenintegral 2.Art" bezeichnet. Man kann sich die Lösung eines solchen Integrals sehr einfach machen (und das kommt in der Physikalischen Chemie "alle Nase lang" vor), wenn das Integral "wegunabhängig" ist. Dieses ist genau dann der Fall, wenn $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ exakt ist (siehe Aufgabe 1). Dann gibt es nämlich eine Funktion $U(x,y)$ mit $P(x,y) = U_x(x,y)$ und $Q(x,y) = U_y(x,y)$, also (nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und weil $U_x(x,y)dx + U_y(x,y)dy$ das totale Differential von U ist)

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_C U_x(x,y)dx + U_y(x,y)dy = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A),$$

wobei x_B, y_B die Endpunkte der Kurve C und x_A, y_A deren Anfangspunkte sind.

Berechnen Sie auf diese Weise das Integral

$$\int_C e^{-y} dx + (1 - xe^{-y})\, dy,$$

wobei

a) C der Viertelkreis ist, der bei (1,0) beginnt und bei (0,1) endet.

b) C der gesamte Kreis um den Ursprung mit Radius 1 ist (Kreisintegral).

Aufgabe 3: (Berechnung einer Fourier-Transformation)

Sie sollen die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ der folgenden Funktion ausrechnen: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-\sqrt{c}|x|},\ c > 0$.

Hinweis: Anstatt das uneigentliche Integral in den Grenzen $-\infty$ bis ∞ auszurechnen, schreiben Sie dieses als Summe von zwei uneigentlichen Integralen, wobei das erste von $-\infty$ bis 0 und das zweite von 0 bis ∞ geht. Dadurch lässt sich das |x| einmal in -x und einmal in x auflösen. Betrachten Sie die imaginäre Einheit i als Konstante beim Integrieren. Nutzen Sie $e^{-\infty} = 0$. Fassen Sie am Ende alle Terme zusammen, so dass die imaginäre Einheit verschwindet.

Aufgabe 4: (Fourier-Transformation zur Vereinfachung von DGLs)

Oft wird die Fourier-Transformation verwendet, um Differentialgleichungen in einfachere Gleichungen umzuwandeln. Die Fourier-Transformierte einer Differentialgleichung kann z.B. eine ganz gewöhnliche Gleichung sein, die man einfach lösen kann. Die Lösung der ursprünglichen Gleichung würde man dann über die "inverse Fourier-Transformation" erhalten.

Sie sollen hier den wesentlichen Trick dabei zeigen, dass nämlich die Fourier-Transformierte einer abgeleiteten Funktion einfach einer Multiplikation entspricht:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\, \mathcal{F}[f](\omega).$$

Nehmen Sie dabei an, dass f für $x \to \pm\infty$ eine geeignet schnell gegen 0 konvergierende Funktion ist, so dass $f(\pm\infty)e^{\pm i\,\infty} = 0$.

a) Machen Sie sich zunächst wieder mit der partiellen Integration vertraut:

$$\int_a^b f'(x)\, v(x)\, dx = [f(x)v(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, v'(x)\, dx.$$

b) Übertragen Sie diese Formel auf $\mathcal{F}[f'](\omega)$ und rechnen Sie aus.

Viel Erfolg!