Aufgabe 1

a) Exaktheit wird gezeigt, indem man die Integrabilitätsbedingungen prüft

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} e^{-y} &= -e^{-y} \\ \frac{\partial}{\partial x}(1-xe^{-y}) &= -e^{-y} \end{aligned}\right\} = \quad \text{also exakt}$$

---

b) Nun suchen wir die Potentialfunktion $u(x,y)$, deren totales Differential lautet:

$$du = e^{-y}\,dx + (1-xe^{-y})\,dy.$$

Also: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \Rightarrow u(x,y) = xe^{-y} + c(y) \quad (*)$

aus Sicht von x ist das eine „Konstante", die nur von y abhängt.

c) Eingesetzt:

$$\frac{\partial}{\partial y} u = \underbrace{-xe^{-y} + c'(y)}_{\text{aus } (*)} \stackrel{!}{=} \underbrace{1-xe^{-y}}_{\text{aus } Q(x,y)}$$

Daher: $c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y + C$ ← jetzt wirklich eine Konstante

Insgesamt: $$\underline{\underline{u(x,y) = x \cdot e^{-y} + y + c}}$$

d) $u(x,y) = x \cdot e^{-y} + y = \text{constant}$

Umformen nach x

$$\Rightarrow \boxed{x = (c - y)\, e^{y}}$$

Explizite Lösungen der DGL

nicht nötig, um Aufgabe 2 zu lösen!

Aufgabe 2

Hier kann man das Ergebnis von Aufgabe 1 verwenden

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_C u_x(x,y)\,dx + u_y(x,y)\,dy$$

$$= u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A)$$

mit

$u(x,y) = x e^{-y} + y + c$

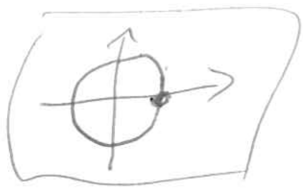
a) $\underset{\text{Endpunkt}}{u(0,1)} - \underset{\text{Anfangspunkt}}{u(1,0)}$

$= 0 \cdot e^{-1} + 1 + c - 1 \cdot e^{-0} + 0 + c$

$= 1 - 1 = 0$ „zufällig" kommt "0" raus.
Bei unterschiedlichen Punkten (x_A, y_A) und (x_B, y_B) könnte das Ergebnis aber auch $\neq 0$ sein

b)

$\underset{\text{Endpunkt}}{u(1,0)} - \underset{\text{Anfangspunkt}}{u(1,0)} = 0$



Bei Aufgabe 2b) kommt "0" raus, weil Anfangs- und Endpunkt identisch sind.

Mathematisch gesehen ist noch wichtig, dass das Gebiet, durch das die Kurve verläuft, „einfach zusammenhängend" ist.

Für solche Kreisintegrale verwendet man auch das Symbol „$\oint$" anstelle von „$\int_c$".

Aufgabe 3

$$\mathcal{F}[f](\omega)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi c}} \left(\int_0^\infty e^{-\sqrt{c}\,x} e^{-i\omega x}\, dx + \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{c}\,x} e^{-i\omega x}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi c}} \left(\frac{-1}{i\omega+\sqrt{c}} e^{-x(i\omega+\sqrt{c})} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{-i\omega+\sqrt{c}} e^{x(-i\omega+\sqrt{c})} \Big|_{x=-\infty}^{x=0} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi c}} \left(\frac{1}{i\omega+\sqrt{c}} + \frac{1}{-i\omega+\sqrt{c}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\omega^2+c)}$$

Daher ist auch

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(\omega^2+c)} \right] = \frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-\sqrt{c}\,|x|}$$

Aufgabe 4

$$\mathcal{F}[f'](\omega)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot e^{-i\omega x} \, dx$$

partielle Int.

$$= \underbrace{\left[f(x) e^{-i\omega x} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \underbrace{(-i\omega) \cdot e^{-i\omega x}}_{\text{= Ableitung von } e^{-i\omega x}} \, dx$$

$$= i\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{-i\omega x} \, dx$$

$$= i\omega \cdot \mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{q.e.d.}$$