FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 13, 04.02.2020 um 8:00 Uhr

Lernziele: Lösung partieller DGLs, Fourier-Transformation als Projektion

---

In den folgenden Aufgaben kommt der Laplace-Operator vor: Δu bedeutet dabei die Summe der zweiten (ungemischten) Ableitungen nach allen x-Koordinaten, also: $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$, wobei u eine reelle/komplexe Funktion in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ (und evtl. noch weiteren Variablen) ist.

Die zeitabhängige Schrödingergleichung lässt sich beispielsweise mit Hilfe dieses Operators schreiben als:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1, \dots, x_n, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(x_1, \dots, x_n, t) + v(x_1, \dots, x_n)\psi(x_1, \dots, x_n, t),$$

kurz

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + v(x)\psi,$$

wobei nach deren Lösung $\psi(x_1, \dots, x_n, t)$ gesucht wird. Δ bezieht sich in dieser Gleichung nicht auf die t-Variable (Zeit), sondern nur auf die x-Variablen (Ort). Die Lösung dieser partiellen DGL ist überhaupt nicht einfach, daher soll es in diesem Aufgabenblatt um einfachere Gleichungen gehen: Die Poisson-Gleichung und die Wärmeleitungsgleichung.

Aufgabe 1: (Die Poisson-Gleichung: Lösung mittels Fourier-Transformation)

Wir wollen die Poisson-Gleichung (in der Form einer Potentialgleichung)

$$-\Delta u + cu = f,$$

lösen. Dabei soll $c > 0$ eine feste Konstante sein und u und f nur von den Variablen $x_1, \dots, x_n$ abhängen. f wird als gegeben vorausgesetzt, u sei die zu suchende Lösung. Diese Aufgabe ist viel leichter als sie scheint!!!

a) Zunächst berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Potentialgleichung. Dazu müssen Sie wissen, dass die Fourier-Transformation eine lineare Abbildung ist, also für eine Konstante c und zwei Funktionen g und h gilt: $\mathcal{F}[g + ch](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega) + c\mathcal{F}[h](\omega)$. Dann müssen Sie noch die Erkenntnis über die Fourier-Transformierte einer Ableitung aus Aufgabe 4 des 12. Übungszettels nutzen, wobei ω jetzt ein n-dimensionaler Vektor ist! Zeigen Sie, dass für die Potentialgleichung gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {\omega_i}^2\right)\mathcal{F}[u] + c\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[f]. \quad (*)$$

b) Lösen Sie $(*)$ nach u auf, indem Sie die Gleichung nach $\mathcal{F}[u]$ umstellen und auf beiden Seiten der Gleichung die inverse Fourier-Transformation anwenden:

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[u]\big] = u.$$

Wie lautet also letztendlich die Lösungsformel für die Gleichung?

c) Jetzt soll speziell der eindimensionale Fall $n = 1$ betrachtet werden. In Aufgabe 3 auf dem 12. Übungszettel haben Sie gesehen, dass $g = \frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-\sqrt{c}|x|}$ die inverse Fourier-Transformierte von $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2+c}$ ist. Machen Sie sich dieses klar und ferner, dass gemäß Teilaufgabe b) daher $u = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[f]\, \mathcal{F}[g]\big]$ gilt.

Zeigen Sie mit Hilfe des "Faltungsgesetzes" $\mathcal{F}[f]\, \mathcal{F}[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy\big]$, dass die Lösung der eindimensionalen Potentialgleichung lautet:

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\sqrt{c}|y|}\, dy.$$

Aufgabe 2: (Die Poisson-Gleichung: Lösung mittels Separationsansatz)

Dieses Mal soll die zweidimensionale(!) Poisson-Gleichung (in der Form einer Laplace-Gleichung)

$$\Delta u = 0$$

(also: $c = 0, f = 0$) auf der Box B $x_1 = 0..a,\ \ x_2 = 0..b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ untersucht werden. Zusätzlich sollen für alle $x_1, x_2 \in B$ und für eine Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgende Randbedingungen (Dirichlet-Bedingungen) eingehalten werden:

$$u(0, x_2) = 0,$$

$$u(a, x_2) = h(x_2),$$

$$u(x_1, 0) = 0,$$

$$u(x_1, b) = 0.$$

Wir gehen hier nur die ersten Schritte zu einer Lösung der Differentialgleichung...

a) Zunächst macht man den Ansatz $u(x_1, x_2) = X(x_1)\, Y(x_2)$. Was ergibt sich aus den Randbedingungen für $Y(0)$ und $Y(b)$?

b) Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz und für $X(x_1)\, Y(x_2) \neq 0$ sich aus der Laplace-Gleichung ergibt: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$.

c) Damit die Gleichung $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$ für alle $x_1, x_2 \epsilon\ \mathbb{R}$ erfüllt ist, müssen beide Seiten der Gleichung gleich einer Konstanten $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ sein. Folgern Sie daraus, dass die Lösung der DGL gegeben ist durch $X'' - \lambda X = 0$ und $Y'' + \lambda Y = 0$.

d) Welche Werte kann λ gemäß c) annehmen, wenn man die Randbedingungen aus a) berücksichtigt und den Ansatz $Y(x_2) = \sin(cx_2)$ nutzt?

Aufgabe 3: (Die Wärmeleitungsgleichung: Fourier-Transformation)

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung soll nun analog zu Aufgabe 1 geschehen. Die Gleichung lautet:

$$u_t = \Delta u.$$

Wenn man die Fourier-Transformation nur in den x-Koordinaten durchführt, kommt man zu der Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}[u] = -\left(\sum_{i=1}^{n} {\omega_i}^2\right)\mathcal{F}[u].$$

Dieses ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\mathcal{F}[u]$. Wie lautet die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen DGL? Wie kann man jetzt analog zu 1)b) die Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhalten?

Aufgabe 4: (Projektionen auf ONS)

Die Fourier-Transformation ist eine Projektion, so wie wir sie schon am Anfang der Vorlesung kennengelernt haben. Zur Wiederholung der Eigenschaften von Projektionen auf ONS dient diese Aufgabe: Die beiden Funktionen $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS) bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$.

a) Ohne Rechnung: Welchen Wert haben die folgenden Skalarprodukte $\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle$, $\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ bzw. $\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle$?

b) Projizieren Sie die Funktion $f(x) = x^2$ auf das obige ONS mittels $\Pi f = \sum_{i=1}^{2}\langle f, \varphi_i\rangle\, \varphi_i$. Bilden Sie das Residuum $\varphi_3 = \Pi f - f$. Zeigen Sie, dass φ_3 orthogonal zu φ_1 und φ_2 ist.

c) Sei g: $[-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und stelle Πg eine Projektion von g auf ein ONS gemäß obigen Skalarproduktes dar. Welchen Wert nimmt dann die Funktion $\Pi(\Pi g - g)$ an? Begründen Sie. **Viel Erfolg!**