Aufgabe 1

a) Für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\, \mathcal{F}[f](\omega)$$ Aufg. 4 Zettel 12

Daher:

$$\mathcal{F}[f''](\omega) = i\omega\, \mathcal{F}[f'](\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}[f](\omega) \qquad (*)$$

$$-\Delta u + cu = f$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[-\Delta u + cu] = \mathcal{F}[f]$$

$$\Leftrightarrow -\mathcal{F}[\Delta u](\omega) + c\,\mathcal{F}[u](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) \mathcal{F}[u](\omega) + c\,\mathcal{F}[u](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

wegen Linearität von $\mathcal{F}$ und ω Vektor

b) aus a)

$$\Rightarrow \mathcal{F}[u](\omega) = \frac{\mathcal{F}[f](\omega)}{\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) + c\right)}$$ Umstellen

$$\Rightarrow u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}[f](\omega)}{\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) + c}\right]$$

c) aus b)

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f] \cdot \frac{1}{\omega^2 + c}\right]$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-\sqrt{c}|x|}\right]\right]$$ Aufgabe 3) 12. Zettel

$$= \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\sqrt{c}\,|y|}\, dy$$ Faltungssatz

Aufgabe 2

a) Randbedingungen

$u(0,x_2)=0$ also $X(0)\cdot Y(x_2)=0$ $\forall x_2=0..b$

$u(a,x_2)=h(x_2)$ also $X(a)\cdot Y(x_2)=h(x_2)$ $\forall x_2=0..b$

$u(x_1,0)=0$ also $X(x_1)\cdot Y(0)=0$ $\forall x_1=0...a$

$u(x_1,b)=0$ also $X(x_1)\cdot Y(b)=0$ $\forall x_1=0...a$

wenn jetzt $X(x_1)$ nicht identisch gleich 0 ist, dann folgt aus der letzten Randbedingung, dass

$$Y(0)=Y(b)=0$$

und aus der ersten Randbedingung folgt weiterhin $X(0)=0$ und aus der ~~dritten~~ zweiten folgt $Y(x_2)=\frac{h(x_2)}{X(a)}$ (oder $X(a)=0$)

b) $\Delta\left(X(x_1)\cdot Y(x_2)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(X(x_1)\cdot Y(x_2)\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(X(x_1)\cdot Y(x_2)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow X''(x_1)Y(x_2)+X(x_1)\cdot Y''(x_2)=0$$

$$\overset{XY\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}$$

c) aus Überlegung:

$$\frac{X''}{X}=\lambda \quad \overset{X\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad X''-\lambda X=0$$

$$-\frac{Y''}{Y}=\lambda \quad \overset{Y\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad Y''+\lambda Y=0$$

d) $y'' + \lambda y = 0$ ist erfüllt für Funktionen

$$y(x_2) = \sin(c \cdot x_2) + d, \text{ wenn } \lambda = c^2 \text{ also } c = \pm\sqrt{\lambda}$$

aus a) $\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \\ y(b) = 0 \Rightarrow \sin(\pm\sqrt{\lambda} \cdot b) = 0 \end{cases}$

Daher muss $\pm\sqrt{\lambda} \cdot b$ ein Vielfaches von π sein

$$\pm\sqrt{\lambda} \cdot b = n \cdot \pi \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2$$

Jetzt wäre nur noch $\frac{X''}{X} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ zu lösen

Aufgabe 3

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}[u] = -\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) \mathcal{F}[u]$$

~~hat~~ allgemeine Lösung

$$\mathcal{F}[u] = c(\omega) \cdot e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) \cdot t}$$

Daher

$$\underline{\underline{u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[c(\omega) \cdot e^{-\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j^2\right) \cdot t}\right](x)}}$$

Aufgabe 4

a) $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$ wegen Orthogonalität

$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 1$ wegen Normiertheit und $\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$

b) $\Pi f = \langle x^2, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle x^2, \varphi_2 \rangle \varphi_2$

$$= \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{1}{2}} x^2 \, dx \right) \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\tfrac{3}{2}} x^3 \, dx \right) \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot x \cdot 0$$

$$= \frac{1}{3} \qquad \varphi_3 = \frac{1}{3} - x^2$$

Orthogonalität muss man mit Hilfe der Integrale $\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle$ bzw. $\langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ nachweisen

c) $(\Pi g - g)$ ← Dieses ist eine Funktion, die laut Gram-Schmidt-Verfahren senkrecht zu allen Funktionen steht, die die Projektionsebene von Π bilden, daher ist

$$\Pi (\Pi g - g) = 0$$