Aufgabe 1

a) $\sqrt{<a,a>} = \sqrt{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1)} = \sqrt{2}$

$\sqrt{<b,b>} = \sqrt{2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{<c,c>} = \sqrt{1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1} = \sqrt{6}$

b) $<a,b> = 1\cdot 2 + 0\cdot 1 - 1\cdot 2 = 0 \Rightarrow \sphericalangle\, (=90°) = \frac{\pi}{2}$

$<a,c> = 1\cdot 1 - 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = 0 \Rightarrow \sphericalangle\, (=90°) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{<b,c>}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{2\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot 1}{3\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{6}} = \cos\alpha$

$\Rightarrow \alpha \approx 1{,}295 \quad (\approx 74{,}2°)$

Aufgabe 2

a) $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \sqrt{3}\int_0^1 (2x-1)\, dx = \sqrt{3}\left(x^2 - x\Big|_0^1\right) = 0$

$\int_0^1 f(x)\, h(x)\, dx = \sqrt{5}\int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)\, dx = \sqrt{5}\left(2x^3 - 3x^2 + x\Big|_0^1\right) = 0$

$\int_0^1 h(x)\, g(x)\, dx = \sqrt{15}\int_0^1 (2x-1)\cdot(6x^2 - 6x + 1)\, dx$

$= \sqrt{15}\left(3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - x\Big|_0^1\right) = 0$

b) $\int_0^1 1\, dx = x\Big|_0^1 = 1$

$\int_0^1 3\cdot(2x-1)(2x-1)\, dx = 3\left(\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right)\Big|_0^1 = 1$

$\int_0^1 5\cdot(6x^2 - 6x + 1)^2\, dx = 36x^5 - 90x^4 + 80x^3 - 30x^2 + 5x\Big|_0^1 = 1$

f, g, h bilden ein Orthonormalsystem: Die Vektoren haben die Länge 1 und stehen senkrecht aufeinander

Aufgabe 3

a) $$x \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

also: $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

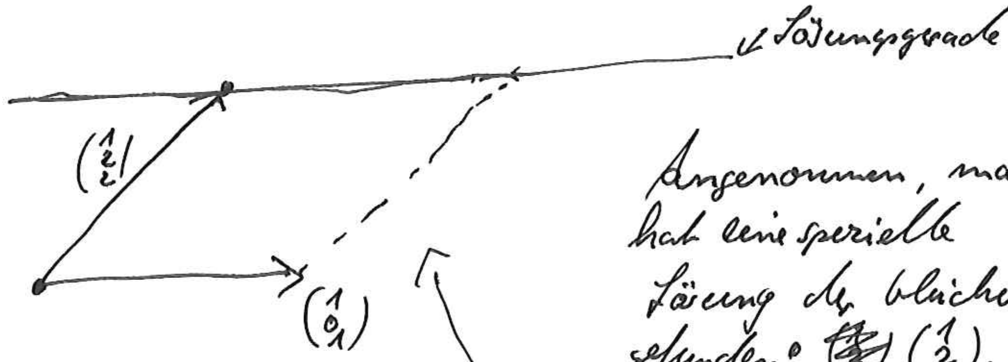
also: $$\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_3 &= 1 \\ -x_2 &= -2 \end{aligned}$$

also: $x_2 = 2$, $x_3 = x_1 + 1$
setze $x_1 = 1$ (z.B.)
$\Rightarrow x_3 = 2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

eine spezielle Lösung $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

b)



Angenommen, man hat eine spezielle Lösung der Gleichung gefunden: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.
Es ändert sich die Fläche des Parallelogrammes nicht, wenn man $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ in Richtung von $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ kippt: Cavalieri

Daher bleibt auch das Kreuzprodukt gleich.

Aufgabe 4

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 10$

b) $a' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle = 20 - 10 = 10$

Bei der Volumenberechnung darf man Ecken des Spats in Richtung der anderen Kantenvektoren kippen, ohne das Volumen zu ändern