FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 3, Abgabe 05.11.2018 um 8:00 Uhr

Lernziele: Rechnen mit Matrizen; transponierte, adjungierte, orthogonale, unitäre Matrix; Rotationsmatrix; Pauli-(Spin-)Matrizen

---

Aufgabe 1: (Grundrechenarten mit Matrizen)

a) Bestimmen Sie die folgenden Summen, sofern möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie, sofern dieses möglich ist, die Produkte AB, AC, BC:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (Transponierte, Adjungierte, symmetrisch, hermitesch)

a) Bilden Sie die Transponierte und die Adjungierte der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4-i \\ 4+i & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2i & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & e \end{pmatrix},$$

wobei a, b, c, d, e, f reelle Zahlen sein sollen.

b) Welche der obigen Matrizen sind symmetrisch bzw. hermitesch?

Anmerkung: Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn die Transponierte A^T identisch zu der Matrix A ist, also $A^T = A$. Eine quadratische Matrix A heißt *hermitesch*, wenn die Adjungierte A^* identisch zu der Matrix A ist, also $A^* = A$.

Aufgabe 3: (Orthogonale Matrix, Rotationsmatrix)

Möchte man einen 2-dim. Vektor v in der Ebene um einen Winkel $\alpha \in [0,2\pi]$ am Ursprung drehen, so kann dieses durch eine Matrixmultiplikation $R_\alpha v$ ausgedrückt werden. Die entsprechende Rotationsmatrix, die diese Drehung ausführt, lautet

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Ein Dreieck habe die Ecken $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wie lauten die Koordinaten der Ecken, wenn man das Dreieck um $\alpha = \frac{\pi}{3}$ am Ursprung dreht?

b) Gibt es symmetrische Rotationsmatrizen?

c) Zeigen Sie, dass Rotationsmatrizen orthogonal sind. Dazu müssen Sie Eigenschaften der Winkelfunktionen nachlesen.

Anmerkung: Eine quadratische Matrix A heißt *orthogonal*, wenn die Transponierte A^T invers zu der Matrix A ist, also $A^T A = I$, wobei I die entsprechende Einheitsmatrix ist. Eine quadratische Matrix A heißt *unitär,* wenn die Adjungierte A^* invers zu der Matrix A ist, also $A^* A = I$.

Aufgabe 4: (Pauli-Spin-Matrizen)

In der Quantenmechanik werden Beobachtungen in Form von sogenannten (hermiteschen) Operatoren ausgedrückt. Matrizen sind (endlich-dimensionale) Operatoren. Zum Beispiel können die Drehimpulsoperatoren der Spin-1/2-Zustände von Elektronen durch die folgenden Matrizen dargestellt werden, die sich auch Pauli-Matrizen nennen:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Welche der angegebenen Matrizen sind symmetrisch, hermitesch, orthogonal, unitär?

b) Welche Matrizen entsprechen einer Rotationsmatrix? Um welchen Winkel wird gedreht?

c) Sie haben auf dem ersten Übungszettel die Quaternionen kennen gelernt. Vervollständigen Sie die folgende Multiplikationstabelle (3 Ergebnisse sind schon eingetragen) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Multiplikationstabelle (oben rechts auf dieser Seite) für Quaternionen.

$\times$	$\boldsymbol{\sigma_0}$	$\boldsymbol{i\sigma_3}$	$\boldsymbol{i\sigma_2}$	$\boldsymbol{i\sigma_1}$
$\boldsymbol{\sigma_0}$	σ_0			
$\boldsymbol{i\sigma_3}$		$-\sigma_0$		
$\boldsymbol{i\sigma_2}$		$-i\sigma_1$		
$\boldsymbol{i\sigma_1}$				

Viel Erfolg!