Aufgabe 1:

a) Nur die erste Summe ist möglich, da die Dimensionen der Summanden übereinstimmen.
Das Ergebnis erhält man durch elementweise Addition:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Produkte von zwei Matrizen lassen sich bilden, wenn die Spaltenanzahl des ersten Faktors mit der Zeilenanzahl des zweiten übereinstimmt. Dann erhält man das Produkt mittels Falk-Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4-i \\ 4+i & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4+i \\ 4-i & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 4-i \\ 4+i & 1 \end{pmatrix}$

b) hermitesch, da $A^* = A$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2i & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) weder hermitesch noch symmetrisch

a) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & e \end{pmatrix}$ $A^* = A^T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & e \end{pmatrix}$

reelle Einträge

b) A ist hermitesch und symmetrisch, da $A = A^* = A^T$

Aufgabe 3:

a) $R_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{Rotation}}{\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}} \underset{\text{Ecken}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\text{rotierte Ecken}}{\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & -1/2 & 1/2 \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}$$

b) Ja, wenn $\sin\alpha = -\sin\alpha$. Das gilt ja für $\alpha = -\alpha = 0$ und für $\alpha = \pi$ (in beiden Fällen ist der Sinus $= 0$)
Also für Rotationen um 0° oder 180° erhält man symmetrische Rotationsmatrizen

$R_\alpha \cdot R_\alpha^T$

c)
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{=1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_\alpha^T = R_\alpha^{-1}$$

$\Rightarrow$ R_α orthogonal

Aufgabe 4:

a) symmetrisch: $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3$

~~[illegible]~~

hermitesch: $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (wurde so bereits im Text gesagt)

orthogonal: σ_0 (da $\sigma_0^T \sigma_0 = I$)
σ_1 (da $\sigma_1^T \sigma_1 = I$)
σ_3 (da $\sigma_3^T \sigma_3 = I$) orthogonal

σ_2: $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I$ nicht orthogonal

unitär: alle reellwertigen orthogonalen Matrizen sind auch unitär, also σ_0, σ_1 und σ_3

für σ_2 gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_2 \text{ ist } \underline{\text{unitär}}$$

c) Rechnen Sie die Produkte stichprobenartig selber aus! Es gilt bei Vielfachen von Matrizen

z. B. $i \cdot \sigma_3 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Sie werden feststellen, dass die Multiplikationstafel von Quaternionen die gleiche Struktur hat, wie die Multiplikation der (mit i multiplizierten) Spin-Matrizen.