Aufgabe 1

Bild und Kern von A bestimmen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spalten-umformungen $2\cdot\mathrm{I} \overset{\oplus}{\longrightarrow} \mathrm{II}$, $1\cdot\mathrm{I} \overset{\oplus}{\longrightarrow} \mathrm{III}$ $\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$ dito

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(-2)\cdot\mathrm{II} \overset{\oplus}{\longrightarrow} \mathrm{III}$ $\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$ dito

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Bild}}\!\!\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AR \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\!\!\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Kern}} = R$$

Bild: $\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Kern: $\lambda\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Aufgabe 2

a) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

lässt sich $ARy = b$ lösen?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}$$

I ~~ergibt~~ $y_1 = -1$

II ergibt also $y_2 = 1/2$

↯ zu III! Daher keine Lösung.

b ist nicht im Bild von A

b) $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{I} \Rightarrow y_1 = 1 \\ \text{II} \Rightarrow y_2 = 1 \quad \text{passt auch zu (III)} \end{matrix}\right\} \text{b ist im Bild von A}$$

| y_3 beliebig |

Lösung des LGS:

$$x = Ry = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allg. Lösung — spezielle Lös. — Kern von A

Aufgabe 3

Bilanzgleichungen:

C: $x_1 - x_4 = 0$ (I)

Fe: $2x_2 - x_3 = 0$ (II)

O: $3x_2 - 2x_4 = 0$ (III)

Aus (I) $x_1 = x_4$ einsetzen von $x_1 = 1$

liefert $x_4 = 1$

Aus (III) $x_2 = \frac{2x_4}{3} = \frac{2}{3}$

Aus (II) $x_3 = \frac{4}{3}$

Damit sich ganzzahlige Lösung ergibt wird mit 3 multipliziert:

$x_1 = 3$
$x_4 = 3$
$x_2 = 2$
$x_3 = 4$

$3C + 2Fe_2O_3 \rightarrow 4Fe + 3CO_2$

Aufgabe 4

zu lösen ist

$$A^TA\,x = A^Tb$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \quad A^Tb = \begin{pmatrix} 25 \\ 56 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Bilde Kern von A^TA

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tauschen und I mit 10 multiplizieren

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 40 & 30 \\ 30 & 100 & 100 \\ 100 & 300 & 354 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-4 -3

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 30 & -20 & 10 \\ 100 & -100 & 54 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ (+)

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 100 & -100 & 4 \end{pmatrix}}_{=A^TAR} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 100 & -100 & 4 \end{pmatrix}}_{A^TAR} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 25 \\ 56 \\ 150 \end{pmatrix}}_{A^Tb}$$

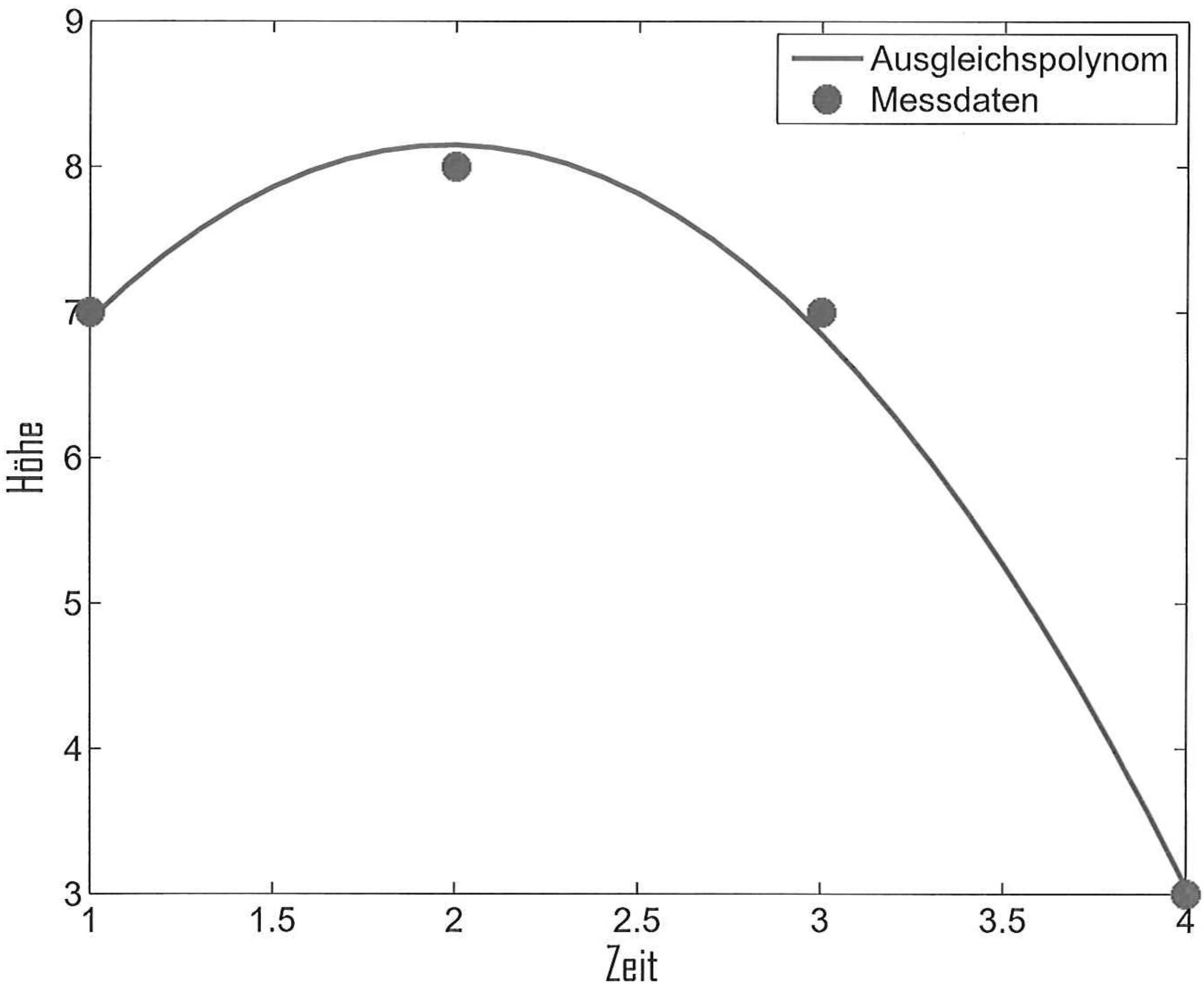
$\Rightarrow y_1 = 2{,}5$ $\Rightarrow x = Ry$

$y_2 = 0{,}95$

$y_3 = -1{,}25$

$$\Rightarrow \cancel{x} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}95 \\ -1{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 4{,}95 \\ -1{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3{,}25 + 4{,}95x - 1{,}25x^2}$$


Ausgleichspolynom
Messdaten
Höhe
Zeit
9
8
7
6
5
4
3
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4