Aufgabe 4

$V_1 = 1 \qquad V_2 = x \qquad V_3 = x^2$

Skalarprodukt $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$

} gegeben

Gram-Schmidt-Verfahren

zunächst prüfen, ob v_1 die Länge 1 hat:

$$\|v_1\|^2 = \int_0^1 v_1(x) \cdot v_1(x)\, dx = \int_0^1 1\, dx = x \Big|_0^1 = 1 \quad \checkmark$$

V_2:

1) Auf bisheriger ONS projizieren

V_1

$$\langle v_1 | v_2 \rangle \cdot v_1 = \left(\int_0^1 1 \cdot x\, dx \right) \cdot 1 = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

"Projektion von v_2 auf v_1

2) Residuum bilden

$$v_2 - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$$

3) Residuum normieren

$$\left\|x - \frac{1}{2}\right\| = \sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \Big|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2x - 1) = \hat{v}_2$$

$x - \frac{1}{2}$ durch Länge teilen

Neues ONS: $v_1 = 1,\ \hat{v}_2 = \sqrt{3}\,(2x - 1)$

v_3:

$v_1, \hat{v}_2$

1) Auf bisheriges ONS projizieren:

$$\langle v_1 | v_3 \rangle \cdot v_1 + \langle \hat{v}_2 | v_3 \rangle \hat{v}_2$$

$$= \left(\int_0^1 1 \cdot x^2 \, dx \right) \cdot 1 + \left(\int_0^1 \sqrt{3}(2x-1) \cdot x^2 \, dx \right) \cdot \sqrt{3}(2x-1)$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 3 \cdot (2x-1) \cdot \int_0^1 (2x^3 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} + (6x-3) \cdot \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot (6x-3) = x - \frac{1}{6}$$

= Projektion von v_3 auf $v_1, \hat{v}_2$

2) Residuum bilden:

$$v_3 - x + \frac{1}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

3) Residuum normieren:

$$\| x^2 - x + \tfrac{1}{6} \| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \tfrac{1}{6} \right)^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 36}}$$

$x^2 - x + \frac{1}{6}$ durch Länge teilen

Neues ONS: $v_1 = 1$, $\hat{v}_2 = \sqrt{3}(2x-1)$

$\hat{v}_3 = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

fertig!