Aufgabe 1

char. Polynom berechnen

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 6\cdot(2-\lambda)$$

Nullstellen des char. Polynom

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$$

Ergebnisse aus Aufg. 3 vom 6. Übungszettel

Eigenvektoren für $\lambda_1 = -1$:

$$(A-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild-Kern-Algorithmus

$-\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ sind

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 2$

$$(A-\lambda_2 I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tauschen

Bild-Kern-Alg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat schon Stufenform

Eigenvektoren:

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 4$

$$(A-\lambda_3 I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bild-Kern-Alg.

$1/2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 4$:

$$\mu \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a) $\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^{3}$ ← alg. Vielfachheit

$\det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left((5-\lambda)(3-\lambda)+1\right)$

$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64$

$= (4-\lambda)^3$

$\det(A_3 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 \\ 3 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3 - 3\cdot 4\cdot(4-\lambda) + 2\cdot 6\cdot(4-\lambda)$

$= (4-\lambda)^3$

b) Eigenvektoren von A_1: $\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A_1 - 4I) =$ Nullmatrix

↖ geom. Vielfachheit $= 3$

Eigenvektoren von A_2: $\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← geom. Vielfachheit $= 2$

Eigenvektoren von A_3: $\mu_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← geom. Vielfachheit $= 1$

Aufgabe 3

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Eigenvektoren zu A

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & -3/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit App berechnet

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2.4 & 1.6 \\ 0 & 0.6 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

← Diagonalmatrix der Eigenwerte!

Diagonalisierbarkeit!!

b)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{X^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{X}$$

$\downarrow$ App.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ App.

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ App.

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Nicht-Diagonalisierbarkeit:</u>
in der Diagonalen stehen die Eigenwerte von A_2 (4), aber es gibt Außerdiagonalelemente!

Aufgabe 4

a) passt ✓

b) Eigenwerte und -vektoren von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

jeweils auf 4 Nachkommastellen

$\lambda_1 = 0$ Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 > 0$ $(0{,}1665\ldots)$ Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -0.7581 \\ -0.3384 \\ -0.5574 \end{pmatrix} \xrightarrow{*\sqrt{\lambda_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3093 \\ -0.1381 \\ -0.2274 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 > 0$ (2.6035) Eigenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -0.0555 \\ 0.8852 \\ -0.4620 \end{pmatrix} \xrightarrow{*\sqrt{\lambda_3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0895 \\ 1{,}4282 \\ -0.7454 \end{pmatrix}$

$\lambda_4 > 0$ (9.2301) Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -0.6497 \\ 0.3193 \\ 0.6899 \end{pmatrix} \xrightarrow{*\sqrt{\lambda_4}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}9739 \\ 0.9701 \\ 2{,}0959 \end{pmatrix}$

c) jetzt 3D-Koordinaten der 4 Punkte von den Komponenten der 3 Vektoren aus b) ablesen:

Atom 1 : (0, 0, 0)

Atom 2 : (-0.3093/-0.0895/-1,9739)

Atom 3 : (-0.1381/1,4282/0.9701)

Atom 4 : (-0,2274/-0,7454/2,0959)