# Aufgabe 1

Satz von Schwarz
$\Rightarrow$ 2 Terme erzeugen

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\, dy^2$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}\, dx \cdot dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\, dx \cdot dy$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\, dy \cdot dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}\, dy \cdot dy$$

ausklammern

$$= \left( \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x}\, dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\, dy \,,\; \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\, dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y}\, dy \right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

als Matrixprodukte schreiben!

$$= (dx, dy) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}}_{\text{Hesse-Matrix}} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

# Aufgabe 2: Ableitungen

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y - 2y - 2x$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_x = xy - 2 \quad \rightarrow f_{xx} = y, \quad \rightarrow f_{xy} = x$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f_y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \quad \rightarrow f_{xy} = x, \quad \rightarrow f_{yy} = 0$$

## Gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} xy - 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

## Hesse-Matrix

$$H_f = \begin{pmatrix} y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

---

## kritische Punkte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} xy - 2 = 0 \xrightarrow{\text{II}} y = \pm 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \underset{\text{I}}{\Rightarrow} x = \pm 2 \end{array}$$

| | |
|---|---|
| $x_1 = 2$<br>$y_1 = 1$ | $x_2 = -2$<br>$y_2 = -1$ |

Aufgabe 3:

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \text{Richtung 1}$$

$$(dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (\varepsilon, \varepsilon) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} = (\varepsilon, \varepsilon) \begin{pmatrix} 3\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= 5\varepsilon^2 > 0$$

kritischen Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $H_f$ einsetzen

$$\boxed{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \text{Richtung 2}$$

$$(dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = (-\varepsilon, \varepsilon) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} = (-\varepsilon, \varepsilon) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= -3\varepsilon^2 < 0$$

Daher: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Sattelpunkt!

## Aufgabe 4:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+16}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2},$$

da charakteristisches Polynom $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 > 0$ , $\lambda_2 < 0$

Daher: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Sattelpunkt 1. Ordnung