Klausurrelevant ist Aufgabe 1

Aufgabe 1 a)

zu zeigen: Lösung eines linearen DGL-Systems

$$\dot{z} = \Lambda z, \text{ wobei } \Lambda \text{ Diagonalmatrix.}$$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Struktur ergeben sich <u>entkoppelte</u> Differentialgleichungen

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2, \quad \dot{z}_3 = \lambda_3 z_3$$

Die allgemeine Lösung solcher linearen DGL ist

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad z_3(t) = c_3 e^{\lambda_3 t},$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ beliebige Skalare sein dürfen.

Aufgabe 1 b)

Zu lösen ist nun

$$\dot{y} = By \quad \text{mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst diagonalisiert man dieses DGL-System.
Dazu berechnet man die Eigenwerte und Eigenvektoren von B

$$\lambda_1 = -1 \qquad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow X = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{\text{Matrix der Eigenvektoren}}$$

$$\text{zu } \lambda_1 \quad \text{zu } \lambda_2 \quad \text{zu } \lambda_3$$

$$\lambda_3 = 4 \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann löst man das entkoppelte System gemäß Aufgabe 1a)

Eigenwerte einsetzen

$$z_1 = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = c_1 \cdot e^{-t}$$
$$z_2 = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_2 \cdot e^{2t} \qquad \Rightarrow z = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$
$$z_3 = c_3 \cdot e^{\lambda_3 t} = c_3 \cdot e^{4t}$$

Jetzt setzt man $y = Xz$, also

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix}}_{z} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} \\ -2c_1 e^{-t} + 2c_3 e^{4t} \\ 3c_1 e^{-t} + 2c_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

✓

Das ist die allgemeine Lösung

Aufgabe 1/c):

A lässt sich nicht diagonalisieren. Man findet nur den Eigenwert 4 und den zugehörige Eigenvektor $x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diesen ergänzt man zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ (wobei man 2 orthogonale Vektoren zu x_1 wählt ~~/~~ Orthogonalsystem)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

paarweise orthogonal

Damit

$$\Lambda = X^{-1} A X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichung in $\dot{z} = \Lambda z$ lässt sich ~~t~~ wieder leicht lösen $z_3 = c_3 e^{4t}$.

Die zweite Gleichung in $\dot{z} = \Lambda z$ lautet

$$\dot{z}_2 = 4 z_2 + 15 z_3 = 4 z_2 + 15 \cdot \underbrace{c_3 \cdot e^{4t}}_{= z_3} \quad (*)$$

die 4 ist nun wichtig!

Der Ansatz für die Lösung (Variation der Konstanten) lautet:

$$z_2 = \tilde{c}_2(t) \cdot e^{4t}$$

eingesetzt in die Gleichung (*)

$$\frac{d\left(\tilde{c}_2(t) \cdot e^{4t}\right)}{dt} = 4 \cdot \tilde{c}_2(t) \cdot e^{4t} + 15 \cdot c_3 e^{4t}$$

|| Produktregel

$$4\tilde{c}_2(t)\, e^{4t} + \dot{\tilde{c}}_2\, e^{4t}$$

~~Also~~

$$4\tilde{c}_2(t)\, e^{4t} + \dot{\tilde{c}}_2\, e^{4t} = 4\tilde{c}_2(t) e^{4t} + 15 c_3 e^{4t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{c}}_2 = 15 c_3 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{c}_2(t) = 15 c_3 \cdot t + c_2$$

<u>D.h.:</u> $z_2(t) = \tilde{c}_2(t)\, e^{4t} = 15 c_3\, t \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{4t}$

Ab hier war nicht mehr gefordert...

die erste Gleichung in $\dot{z} = \Lambda z$ lautet:

$$\dot{z}_1 = 4z_1 - 2z_2 = 4z_1 - 30c_3 \cdot t \cdot e^{4t} - 2c_2 e^{4t} \quad (**)$$

einsetzen

diese 4 ist wichtig

Die Lösung geht wieder über Variation der Konstanten. Ansatz:

hier steht die 4 aus (**)

$$z_1(t) = \tilde{c}_1(t) \cdot e^{4t}$$

in (**) eingesetzt:

$$\frac{d\left(\tilde{c}_1(t) e^{4t}\right)}{dt} = 4 \cdot \tilde{c}_1(t) e^{4t} - 30 c_3 t e^{4t} - 2 c_2 e^{4t}$$

$\shortparallel$ Produktregel

$$4\tilde{c}_1(t) e^{4t} + \dot{\tilde{c}}_1(t) e^{4t}$$

<u>Also</u>

$$4\tilde{c}_1(t) e^{4t} + \dot{\tilde{c}}_1(t) e^{4t} = 4\tilde{c}_1(t) e^{4t} - 30 c_3 t e^{4t} - 2 c_2 e^{4t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{c}}_1(t) = -30 c_3 t - 2 c_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{c}_1(t) = -15 c_3 t^2 - 2 c_2 t + c_1$$

<u>Daher:</u>

$$z_1(t) = -15 c_3 t^2 e^{4t} - 2 c_2 t e^{4t} + c_1 e^{4t}$$

Die <u>allgemeine Lösung</u> der ursprünglichen Gleichung ist gegeben als $y = X z$

$$y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 c_3 t^2 e^{4t} - 2 c_2 t e^{4t} + c_1 e^{4t} \\ 15 c_3 t e^{4t} + c_2 e^{4t} \\ c_3 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 c_3 t^2 e^{4t} + 4 c_2 t e^{4t} + (c_1 + c_3) e^{4t} \\ 15 c_3 t e^{4t} + c_2 e^{4t} \\ -15 c_3 t^2 e^{4t} - 2 c_2 t e^{4t} + (c_1 + 2c_3) e^{4t} \end{pmatrix}$$