Das Ableiten ist eine lineare Abbildung, denn

$$\frac{d}{dt}\,(\alpha\, x(t) + \beta\, y(t)) = \alpha\, x'(t) + \beta\, y'(t)$$

Daher ist so etwas wie: Gesucht ist eine Funktion $x(t)$ mit

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = 2t$$

auch nichts anderes als eine lineare Gleichung mit unbekannter Lösung x(t) und linearer Abbildung $A = \frac{d}{dt}$ und „rechter Seite“ $\mathrm{b} = 2t$. (Funktionen sind auch Vektoren!)
Die allgemeine Lösung ist also gegeben als

x(t)= spezielle Lösung + Kern der Abbildung A.

Was ist die spezielle Lösung? Was ist der Kern von A?

Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung!

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\,\psi(x) + U(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

Überlegen Sie sich dazu, was folgende Sätze bedeuten:
„Das Ableiten einer Funktion $\psi(x)$ ist eine lineare Abbildung“

„Das Multiplizieren einer Funktion $\psi(x)$ mit einer anderen Funktion (oder Konstanten) ist eine lineare Abbildung“

„Das Addieren von zwei Funktionen ist eine lineare Abbildung (in jedem Summanden)“

„Das Hintereinander-Ausführen von linearen Abbildungen ist eine lineare Abbildung“