MATHEMATIK I

Potenzreihenansatz

AUFGABE: FINDEN SIE DIE LÖSU

$x^2 \cdot y' = e^y$ weiter soll y(1)=0

bzw.

$x^2 \cdot dy = e^y\, dx$ weiter soll y(1)=0

Integrierender Faktor: $\boxed{\frac{e^{-y}}{x^2}}$

$$e^{-y}\, dy - \frac{1}{x^2}\, dx = 0$$

$f(x,y) = -e^{-y} + g(x)$ (y integrieren)

$f_x(x,y) = g'(x)$ (nach x ableiten)

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (Vergleich)

$\Downarrow$

$g(x) = \frac{1}{x} + c$

Lösung: $-e^{-y} + \frac{1}{x} + c = 0$

nach y umformen: $y(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} + c\right)$

Anfangswert soll sein $y(1) = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \ln(x)}}$

KOMPLIZIERTERE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Es soll um die Lösung der Differentialgleichung $x^2 f' = e^f$ gehen. Ja, y heißt ab jetzt f. Wir suchen nicht nach y(x), sondern nach f(x).

Auch wenn diese Gleichung als exakte DGL gelöst werden konnte, können solche Gleichungen aber auch viel komplizierter sein, so dass der Ansatz aus der letzten Stunde nicht funktioniert. Oder, was auch möglich ist, man findet z.B. den integrierenden Faktor nicht…

ANFANGSWERTPROBLEM

SCHAUEN SIE SICH NOCHMAL DIE BEISPIELE AUF SEITE 4 DER LETZTEN VORLESUNG AN!

Zudem haben wir bei der Lösung von exakten Differentialgleichungen bereits gesehen, dass die Lösung nicht eindeutig sein muss. Meistens gibt die Ordnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung an, wie viele frei wählbare Parameter die Lösung einer DGL hat. Daher möchten wir noch zusätzlich eine Bedingung angeben (f(1)=0), die sich „Anfangswert“ nennt. Damit wird aus dem Problem, eine Differentialgleichung zu lösen, ein sogenanntes *Anfangswertproblem:*

$$x^2 f' = e^f\ ,\ f(1) = 0$$

Dieses konkrete Problem hat (aber das ist nicht für alle Anfangswertprobleme so) eine eindeutige Lösung. Doch wie bekomme ich diese Lösung??

DIE DGL ALS REKURSIONSVORSCHRIFT

Das interessante ist, dass die Gleichung $x^2 f' = e^f$ eine Lösung für $f'(x)$ liefert, wenn f bekannt sein sollte.

Die Gleichung $x^2 f' = e^f$ liefert zum Beispiel $f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{x^2}$.

ICH KENNE ZWAR NICHT f… ABER ICH WEISS f(1)=0. WAS IST ALSO f'(1)? ÜBERLEGEN SIE!

Wenn ich beide Seiten von $x^2 f' = e^f$ nach x ableite (und bedenke, dass f von x abhängen soll), dann erhalte ich den Zusammenhang:

ERST SELBER RECHNEN, DANN DIESES FENSTER SCHLIESSEN!

X

GLEICHUNG IMMER WIEDER ABLEITEN

$$x^2 f' = e^f$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$2xf' + x^2 f'' = f' e^f$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$2f' + 4xf'' + x^2 f''' = f'' e^f + (f')^2 e^f$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$6f'' + 6xf''' + x^2 f'''' = f''' e^f + 3f'' f' e^f + (f')^3 e^f$$

$\dots$

Aus der obersten Gleichung ergibt sich mit Einsetzen des Anfangswertes $f(1) = 0$ an der Stelle $x = 1$, dass $1^2 f'(1) = e^{f(1)}$ also $f‘(1) = e^0 = 1$.

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich mit Anfangswert f(1)=0 und f‘(1)=1, dass $2f'(1) + 1^2 f''(1) = f'(1)e^{f(1)}$, also $2 + f''(1) = 1$, also $f“(1) = -1$.

SO BEKOMMEN WIR ALLE WERTE VON $f^{(n)}(1)$

$x^2 f' = e^f$

$2xf' + x^2 f'' = f' e^f$

$2f' + 4xf'' + x^2 f''' = f'' e^f + (f')^2 e^f$

$6f'' + 6xf''' + x^2 f'''' = f''' e^f + 3f'' f' e^f + (f')^3 e^f$

…

Aus der dritten Gleichung ergibt sich mit $f(1) = 0$ und $f‘(1) = 1$ und $f“(1) = -1$, dass $2 - 4 + f''' = -1 + 1$ also $f'''(1) = 2$.

Aus der vierten Gleichung ergibt sich $f''''(1) = -6$.

POTENZREIHENANSATZ I

Eigentlich müssten Sie jetzt vielleicht erraten, warum Lagrange im Jahre 1771 von der Taylorreihe so begeistert war…

Wenn ich auf diese Weise alle(!) Ableitungen von der gesuchten Funktion an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ ausrechnen kann (die Entwicklungsstelle x_0 ergibt sich aus dem Anfangswert), so kann ich die Lösungsfunktion als Potenzreihe (Taylorreihe) aufschreiben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Unsere bisher gefundenen Ableitungswerte $f^{(n)}(x_0)$ ergeben den Anfang dieser Potenzreihe:

$$f(x) = \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4 \ldots$$

RECHNEN SIE DIE ZAHLENWERTE DIESER BRÜCHE AUS. KENNEN SIE DIE REIHE?

EXKURS: EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

$x^2 f' = e^f$

$2xf' + x^2 f'' = f'e^f$

$2f' + 4xf'' + x^2 f''' = f''e^f + (f')^2 e^f$

$6f'' + 6xf''' + x^2 f'''' = f''' e^f + 3f''f'e^f + (f')^3 e^f$

$\dots$

Dieses Schema, die Ableitungen der gesuchten Funktion auszurechnen, kann man auf viele (sehr komplizierte) Anfangswertaufgaben übertragen. In jedem Schritt dieses Verfahrens tritt eine weitere Ableitung und damit stets eine neue Unbekannte auf. (Gleichungen mit einer Unbekannten kann man z.B. mit dem Newton-Verfahren lösen.) In unserem Beispiel waren diese Gleichungen stets eindeutig lösbar. Es kann allerdings sein, dass sich Gleichungen ergeben, die keine Lösung haben oder die mehrdeutige Lösungen haben. So können Anfangswertprobleme auch unlösbar oder mehrdeutig lösbar sein.

EXKURS: „SPÄTER EINSTEIGEN“, ABER GLEICHE LÖSUNG

$x^2 f' = e^f, \;\; f(1) = 0$

$2xf' + x^2 f'' = f' e^f \;, f(1) = 0, f'(1) = 1$

$2f' + 4xf'' + x^2 f''' = f'' e^f + (f')^2 e^f, \;\; f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1$

…

Das Anfangswertproblem: $x^2 f' = e^f$ mit f(1)=0 führt zu der gleichen Lösung, wie das Anfangswertproblem: $2xf' + x^2 f'' = f' e^f$ mit f(1)= 0 und f‘(1)=1 oder wie das Anfangswertproblem: $2f' + 4xf'' + x^2 f''' = f'' e^f + (f')^2 e^f$ mit f(1)=0, f‘(1)=1 und f“(1)=-1. Auf diese Weise ist es „ratsam“ so viele Anfangswerte vorzugeben, wie es der Ordnung der Differentialgleichung entspricht. Die blaue DGL hat die Ordnung 3, man gibt 3 Anfangswerte vor: f(1)=0, f‘(1)=1 und f“(1)=-1.

MAN SIEHT DAS MUSTER NICHT…

Sie können sich schon vorstellen, dass das gelernte Verfahren recht aufwendig werden kann. Die Gleichungen, die zu lösen sind, werden durch die Ableitungsregeln (Kettenregel liefert stets neue Faktoren, Produktregel liefert stets neue Summanden in der Gleichung) zu sehr komplizierten und schlecht handhabbaren Objekten. Obwohl man diese Gleichungen dann tatsächlich mit Hilfe des Newton-Verfahrens lösen könnte, gibt es noch eine weitere Schwierigkeit: Man sieht nicht das Muster… Welchem Muster folgen die Koeffizienten der Potenzreihe? Dass sich z.B. für die Koeffizienten im obigen Beispiel die Abhängigkeit $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ für $n \geq 1$ ergibt, ist überhaupt nicht offensichtlich.

Deshalb lernt man in den heutigen Anfangsvorlesungen einen anderen Potenzreihenansatz kennen, der dieses Muster besser offenbart.

POTENZREIHENANSATZ II

Der moderne Potenzreihenansatz geht so: Von Beginn an nimmt man an, dass die gesuchte Funktion sich als eine Potenzreihe darstellen lässt (mit unbekannten/gesuchten Koeffizienten a_n) :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

LEITEN SIE DIE POTENZREIHE GLEIDWEISE AB! WAS IST DIE POTENZREIHE VON f'(x)?

Dann kennt man auch durch gliedweises Differenzieren die Potenzreihen der Ableitungen.

POTENZREIHENANSATZ II

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n$$

$$f'\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n \, (x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \, (n-1) \, a_n \, (x - x_0)^{n-2}$$

POTENZREIHENANSATZ II

Der Trick des Verfahrens ist es nun, die Potenzreihen für f, f‘ usw. direkt in die Differentialgleichung einzusetzen. So erhält man Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten a_n.

Wir wollen das am motivierenden Beispiel einmal ausführen, obwohl wir dabei die DGL etwas verändern werden, um es für die Vorlesung einfach genug zu halten…

Satt $x^2 f' = e^f$ wollen wir die Gleichung $x^2 f' = 1 + f + \frac{1}{2} f^2$ lösen.

Wir haben also die Exponentialfunktion e^f durch den Anfang ihrer Potenzreihenentwicklung ersetzt.

POTENZREIHENANSATZ II: ALGORITHMUS

Schritt 1: Potenzreihen in die DGL einsetzen

Schritt 2: $(x - x_0)$ durch eine Variable y ersetzen (zum einfacheren Schreiben)

Schritt 3: Alle auftauchenden Produkte auflösen (Distributivgesetz)

Schritt 4: Indexverschiebung zur Angleichung der Exponenten

Schritt 5: Die ersten Koeffizienten a_n aus den Anfangsbedingungen ablesen

Schritt 6: Die weiteren Koeffizienten rekursiv bestimmen

Jetzt zeige ich das mal Schritt für Schritt…

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 1

Also in $x^2 f' = 1 + f + \frac{1}{2} f^2$ die entsprechenden Potenzreihen für f und f‘ (und $x_0 = 1$) eingesetzt liefert:

$$x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-1)^{n-1}}_{f'(x)} = 1 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n}_{f(x)} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n\right)}_{f(x)^2}$$

Diese Gleichung nach den a_n aufzulösen, wird im Folgenden demonstriert. Für die Klausur wäre dieses Beispiel allerdings zu aufwendig, so dass Sie hier zum Beispiel eine entsprechende Aufgabenlösung finden, die dem Klausurstoff näher kommt. Lesen Sie dennoch dieses komplizierte Beispiel durch, um zu verstehen, welche Schritte gemacht werden müssen, um die Lösung zu bekommen.

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 2

$$x^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (x-1)^{n-1}}_{f'(x)} = 1 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-1)^n\right)}_{f(x)^2}$$

Überall wo jetzt $(x-1)$ steht, ersetzen wir es durch y. Nur damit es etwas weniger Schreibarbeit wird. Dabei fällt auf, dass wir x^2 umschreiben müssen, um es „loszuwerden". Wir entwickeln auch x^2 in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und erhalten: $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = 1 + 2y + y^2$. **Jetzt können wir überall(!) das x loswerden** und erhalten:

ERST SELBER RECHNEN, DANN DIESES FENSTER SCHLIESSEN!

X

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 3

$$(1+2y+y^2)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^{n-1}}_{f\prime(x)} = 1 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n\right)}_{f(x)^2}$$

Alles als Summen schreiben! Jetzt müssen wir die Rechengesetze (Distributivgesetz) anwenden, um den Faktor in die Summe $(1+2y+y^2)$ zu ziehen. Das bekommen Sie hin… Schlimmer ist dieses hier: Wir müssen die Regel zum Ausrechnen von Produkten von (absolut konvergenten) Reihen verwenden. So wird aus dem Produkt von Reihen eine Doppelsumme. (In Formelsammlung nachschauen „Cauchy-Produktformel“, dieser Teil ist nicht klausurrelevant). Es ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right) y^n$$

ZWISCHENSTOPP

Bevor Sie den nächsten Schritt anschauen, versuchen Sie zu verstehen, dass in diesen beiden Summen die gleichen Summanden aufaddiert werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, y^n,$$

indem Sie zum Beispiel jeweils die ersten Summanden explizit hinschreiben:

$a_1 + 2\, a_2 y + 3\, a_3 y^2 + \ \ldots$

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, y^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, y^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, y^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right) y^n$$

Jetzt tauchen überall in den Summen unterschiedliche Potenzen von y auf. **Die Potenzen müssen aber alle gleich werden.** Zum Beispiel so, dass alle Potenzen nach diesem Schritt dann y^n lauten. Diesen Schritt erledigt man, indem man die Laufindizes der entsprechenden Summen ändert. Wenn die Potenz z.B. y^{n-1} lautet, dann lässt man den Laufindex „eins früher" beginnen. Ersetzt also überall in der entsprechenden Summe n durch n+1. Bei y^{n+1} muss man n durch n-1 ersetzen und beginnt „eins später". **(Indexverschiebung:** Hier einfacher erklärt)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, a_{n+1}\, y^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, y^{n} + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\, a_{n-1}\, y^{n} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right) y^n$$

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 5

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,y^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}\,y^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right)y^n$$

Schön, überall steht jetzt die gleiche Potenz. Jetzt kommt keine Umformung… **Jetzt rechnet man aus den Anfangsbedingungen entsprechende Werte für $\boldsymbol{a_n}$.** Man nutzt dabei aus, dass für die Taylorreihe von der Lösungsfunktion gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Mit der Anfangsbedingung f(1)=0 kann man also a_0 ausrechnen:

ERST SELBER RECHNEN, DANN DIESES FENSTER SCHLIESSEN!

X

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 6 (N=0)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,y^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}\,y^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right) y^n$$

Jetzt geht man mit den Indizes n Schritt für Schritt durch. Startend bei n=0. Da die obige Gleichung für alle y gelten soll, kann man so eine Art Koeffizientenvergleich machen. Man sucht alle Monome zusammen, in denen y^0 steht und vergleicht die entsprechenden Koeffizienten auf der rechten und linken Seite der Gleichung. Aufpassen: Manche Summen fangen nicht bei n=0 an! Man erhält für n=0 folgende Gleichung:

$$\boxed{(0+1)\,a_1 \qquad = 1 + \quad a_0 \quad + \quad \frac{1}{2}}$$

ERST SELBER RECHNEN, DANN DIESES FENSTER SCHLIESSEN!
X

Aus dieser Gleichung errechnet man mittels $a_0 = 0$ dann $a_1 = 1$.

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 6 (N=1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,y^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}\,y^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right)y^n$$

Jetzt für n=1 folgende Gleichung:

$$\boxed{(1+1)\,a_2 \quad + \quad 2 \quad \cdot 1\,a_1 \qquad = \qquad a_1 \quad + \quad \frac{1}{2}}$$

Aus dieser Gleichung errechnet man mittels $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ den Wert $a_2 = -\frac{1}{2}$

ERST SELBER RECHNEN, DANN DIESES FENSTER SCHLIESSEN!
X

POTENZREIHENANSATZ II: SCHRITT 6 (N=2...)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}\,y^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,y^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a_{n-1}\,y^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right)y^n$$

Jetzt für n=2... folgende Gleichung (alle Summen starten mindestens bei n=2):

$$\boxed{(n+1)\,a_{n+1} + \quad 2\,n\,a_n + \quad (n-1)\,a_{n-1} \quad = \quad a_n \quad + \quad \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right)}$$

Diese Gleichung kann man umstellen nach a_{n+1} und erhält **eine Rekursionsformel für alle Koeffizienten** für $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m a_{n-m}\right) - 2n\,a_n + (n-1)a_{n-1}}{n+1}.$$

Und hier sieht man genau das Muster, mit dem man die Koeffizienten ausrechnen kann, welches bei dem anderen Ansatz nicht sichtbar wurde.

ENDE DES KLAUSURSTOFFES

Hier endet der Klausurstoff… Jetzt vielleicht noch einige abschließende Bemerkungen zur „Philosophie“ unserer Vorlesung.

EXKURS: ALGEBRAISCHE ANALYSIS

Wir finden auf diese Weise eine Lösung der eingangs definierten Differentialgleichung:

$$f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \pm \cdots$$

Und wer sich an die Taylorreihen erinnert, sieht, dass es sich hier um die Taylorentwicklung von ln(x) handelt. Und tatsächlich löst die Funktion ln(x) die Differentialgleichung.

ABER: Die obige Reihenentwicklung f(x) stimmt mit dem Logarithmus ja nur in einem gewissen Bereich überein (Stichwort: Konvergenzradius). **Kann man denn behaupten, dass diese Reihe auch die Lösung der Differentialgleichung ist außerhalb des Konvergenzradius??** Formal nach den Rechenregeln (Algebra) stimmt es ja… man kann den Wert der Reihe nur nicht für $x \geq 2$ ausrechnen.

Eine Gedankenströmung der Mathematik des 18. Jahrhunderts, die sich „Algebraische Analysis“ nennt, würde die Frage mit „Ja“ beantworten. Die Gedankenströmung der „Mathematischen Analysis“ des 19. Jahrhunderts würde „Nein“ sagen. Heute, in der Postmoderne, würde ich ein deutliches „Vielleicht“ sagen. Aber die Algebraische Analysis hat viele Fallstricke…

EXKURS: FALLSTRICKE DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$0 = \ln(1) = \ln((-1) \cdot (-1)) = \ln(-1) + \ln(-1) = 2\pi i$$

Die komplexe Wurzel und der komplexe Logarithmus sind nicht so wie die entsprechenden reellen Funktionen. Manche Rechenregeln, die bei reellen Zahlen gültig sind, lassen sich auf diese Objekte nicht übertragen, obwohl dieses immer wieder in der Algebraischen Analysis versucht wurde.

In einem Video wird mit algebraischen Methoden „gezeigt“, dass die Summe aller natürlichen Zahlen $-\frac{1}{12}$ ergibt, was natürlich Unsinn ist (auch wenn man die geometrische Reihe hier „formal richtig“ benutzt hat). Wenn man mit Reihen hantiert, die nicht konvergieren (nicht absolut konvergieren), dann gelten eben auch nicht alle Rechenregeln der reellen Algebra.

EXKURS: „ALLGEMEINGÜLTIGKEIT DER ALGEBRA“

Gedanke im 18. Jahrhundert: „Algebraische Analysis“. Schlussfolgerungen, die sich durch algebraische Umformungen ergeben, sind immer korrekt.

Cauchy (Cours d'Analyse, 1821, Introduction, S. ii): „*Was die Methoden betrifft habe ich mich bemüht diesen die Strenge zu geben, die man in der Geometrie fordert, ohne immer auf Überlegungen zurückzugreifen, die sich aus der Allgemeingültigkeit der Algebra ergeben.*“

Ab da: „Mathematische Analysis“. Gültigkeitsbereiche müssen definiert werden. Bei der Behandlung von Reihen, kann man nicht immer alle Gesetze der Berechnung von Polynomen verwenden (kommutieren, integrieren, differenzieren). Die komplexe Wurzel und der komplexe Logarithmus lassen sich nicht als „herkömmliche“ Funktionen oder Rechenausdrücke verwenden. Alles muss präzise bewiesen werden. Anschauung gilt nicht.

EXKURS: NUMERISCHE LÖSUNGSVERFAHREN

Anstatt Differentialgleichungen mit algebraischen Methoden (Termumformungen) lösen zu wollen, werden Differentialgleichungen heute zumeist mit numerischen Methoden angegangen - mit Näherungsverfahren (Sie erinnern sich an das Babylonische Wurzelziehen. Die Philosophie ist: Mit dieser Methode bekommt man niemals exakt die Wurzel aus drei, aber eine beliebig genaue Näherungslösung).

Eine mögliche Methode ist es dabei, den Differentialquotient $f'(x) = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ zu approximieren, indem man keine infinitesimale Zahl dx, sondern eine sehr kleine reelle Differenz Δx einsetzt. Also: $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Damit kann man alle Ableitungen in der Differentialgleichung durch „normale“ Funktionsauswertungen ersetzen.

EXKURS: NUMERISCHE LÖSUNGSVERFAHREN (BEISPIEL)

Am Beispiel unserer eingangs verwendeten DGL:

$f'(x) \cdot x^2 = e^{f(x)}$ wird zu $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot x^2 = e^{f(x)}$

Also umgeformt zu:

$f(x+\Delta x) = \frac{\Delta x}{x^2} e^{f(x)} + f(x)$.

Mit dieser Formel kann ich den Wert von $f(x+\Delta x)$ ausrechnen, wenn ich $f(x)$ gegeben habe. Aus $f(1) = 0$ kann ich also $f(1+\Delta x) = \frac{\Delta x}{1^2} e^0 + 0 = \Delta x$ ausrechnen und daraus $f(1+2\Delta x) = \frac{\Delta x}{(1+\Delta x)^2} e^{f(1+\Delta x)} + f(1+\Delta x) = \frac{\Delta x}{(1+\Delta x)^2} e^{\Delta x} + \Delta x$ ausrechnen und so weiter… also alle Zahlenwerte von $f(1+n\Delta x)$.

EXKURS: EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Da man in der Numerischen Mathematik also nicht die „eigentliche Differentialgleichung“ löst, kann es auch dort passieren, dass man eine „Lösung“ bekommt, obwohl vielleicht die Differentialgleichung keine Lösung hat. Oder man bekommt nur eine von vielen möglichen Lösungen… Daher beschäftigt sich die moderne Mathematik mit dem Nachweis der Existenz und der Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen und mit der „Schrittweitenbestimmung“ für Δx.

Es gibt eine Differentialgleichung (Navier-Stokes-Gleichung), die sehr gut das Strömungserhalten von Fluiden modelliert. Die „Lösungen“ dieser Differentialgleichungen werden auf Rechnern mit entsprechenden numerischen Verfahren durchgeführt und dienen in der Praxis zur Optimierung technischer Prozesse. Das alles, obwohl es bisher nicht bewiesen ist, ob oder dass für diese Gleichung eine eindeutige Lösung existiert.

Das ist eines der sieben Millenium-Probleme der Mathematik, von denen bisher nur eines geknackt wurde… Für die Beantwortung eines solchen Millenium-Problems bekommt man eine Million Dollar. Viel Erfolg!