Mathematik-I

GRUPPEN – SYMMETRIEGRUPPEN

KÖRPER – ENDLICHE KÖRPER

Eine einfache Gleichung lösen

$5 + x = 8$

Eine einfache Gleichung lösen

$5 + x = 8$

$\Leftrightarrow x = 8 - 5 = 3$

Eine einfache Gleichung lösen

$5 + x = 8$

$\Leftrightarrow -5 + (5 + x) = -5 + 8$

$\Leftrightarrow (-5 + 5) + x = -5 + 8$

$\Leftrightarrow 0 + x = -5 + 8$

$\Leftrightarrow x = -5 + 8 = 3$

Eine einfache Gleichung lösen

$5 + x = 8$

$\Leftrightarrow -5 + (5 + x) = -5 + 8$

$\Leftrightarrow (-5 + 5) + x = -5 + 8$

$\Leftrightarrow 0 + x = -5 + 8$

$\Leftrightarrow x = -5 + 8 = 3$

$5 * x = 8$

$\Leftrightarrow 5^{-1} * (5 * x) = 5^{-1} * 8$

$\Leftrightarrow (5^{-1} * 5) * x = 5^{-1} * 8$

$\Leftrightarrow 1 * x = 5^{-1} * 8$

$\Leftrightarrow x = 5^{-1} * 8 = \frac{8}{5}$

Eine einfache Gleichung lösen

$$a \circ x = b$$

$$\Leftrightarrow \hat{a} \circ (a \circ x) = \hat{a} \circ b$$

$$\Leftrightarrow (\hat{a} \circ a) \circ x = \hat{a} \circ b$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{e} \circ x = \hat{a} \circ \mathrm{b}$$

$$\Leftrightarrow x = \hat{a} \circ b = \ \ldots$$

Link zur Definition einer Gruppe

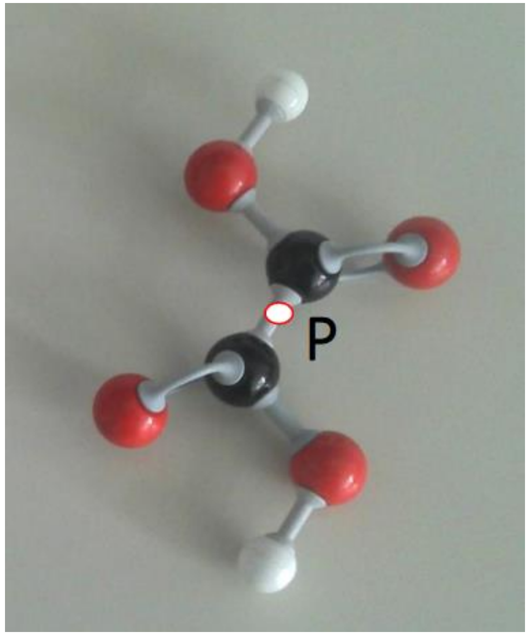
Eigenschaft einer Gruppe

$a \circ x = b \Leftrightarrow x = \hat{a} \circ b$

EINE SCHLUSSFOLGERUNG: Hat die Verknüpfung $\circ$ und die Menge aller (in der Gleichung verwendbaren) Elemente a, b die Eigenschaften einer Gruppe, dann lässt sich eine Gleichung des Typs $a \circ x = b$ stets **eindeutig** nach x auflösen.

Weiterführende Informationen aus YouTube

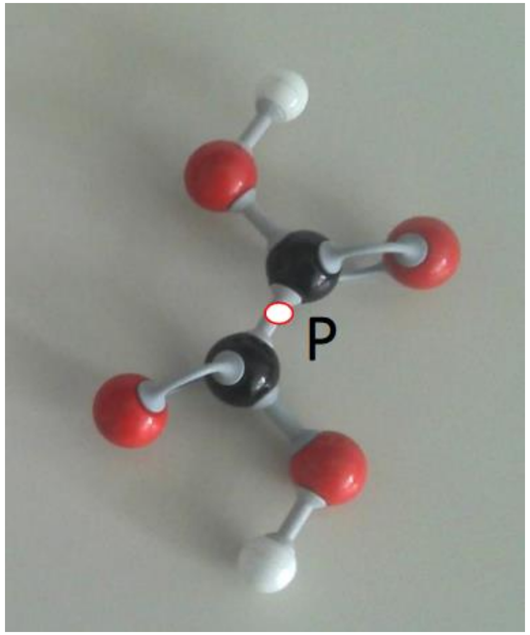
Symmetriegruppen



Addition (ganze Zahlen) und Multiplikation (Bruchzahlen ohne Null) sind Beispiele für Gruppen. In der Chemie nutzt man auch Gruppen, z.B. Symmetriegruppen. Bsp.: Die Symmetrie des Oxalsäure-Moleküls lässt sich durch Symmetrieoperationen ausdrücken. Eine Drehung von180° um den Punkt P (Achse steht senkrecht auf der Ebene) führt zu einer Molekülstruktur, die deckungsgleich (kongruent) zur Ausgangsposition ist. Auch eine Punktspiegelung (im Netz nachlesen, was das ist) an P führt dazu.

Die Symmetrieoperationen, die ein bestimmtes Molekül deckungsgleich abbilden, sind die Elemente dieser Gruppe. Das Hintereinanderausführen dieser Operationen ist die Verknüpfung der Gruppe.

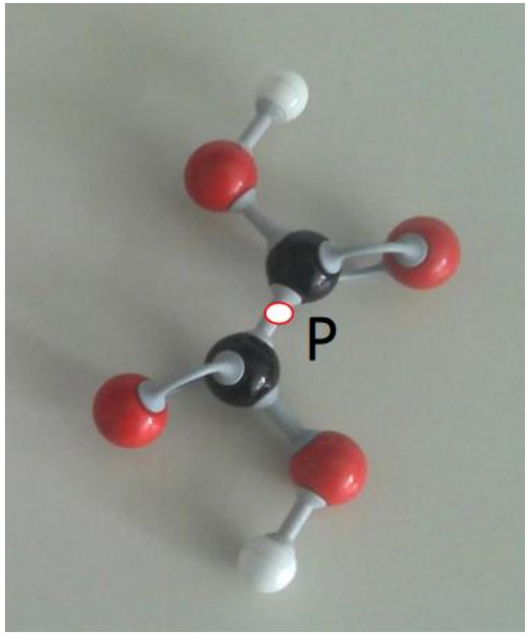
Symmetriegruppen



Die Drehung um 180° wollen wir mal mit „d180“ bezeichnen. Die Punktspiegelung (Inversion) bekommt das Symbol „i“.

Jetzt wissen wir, dass das Verknüpfen von zwei Gruppenelementen wieder ein Gruppenelement ergeben muss (so wie die Addition von zwei ganzen Zahlen wieder eine ganze Zahl ergibt; Abgeschlossenheit der Gruppe). Die Verknüpfung $d180 \circ d180$ (sprich das Hintereinanderausführen der Drehungen) sollte also wieder eine Symmetrieoperation ergeben, die die Oxalsäure deckungsgleich abbildet. Welche Operation kommt dabei raus?

Symmetriegruppen



Wenn man zweimal hintereinander *irgendein Objekt* um 180° dreht, wobei der Drehpunkt und die Drehachse beibehalten werden müssen, dann liegt das Objekt wieder in seiner ursprünglichen Position vor. Wir nennen dieses die „Identität“ und kürzen es mit einer Null „0“ ab. Dieses „Nicht-Bewegen!“ –Element der Symmetriegruppe ist genau das neutrale Element dieser Gruppe. Es gelten damit folgende Gleichungen:

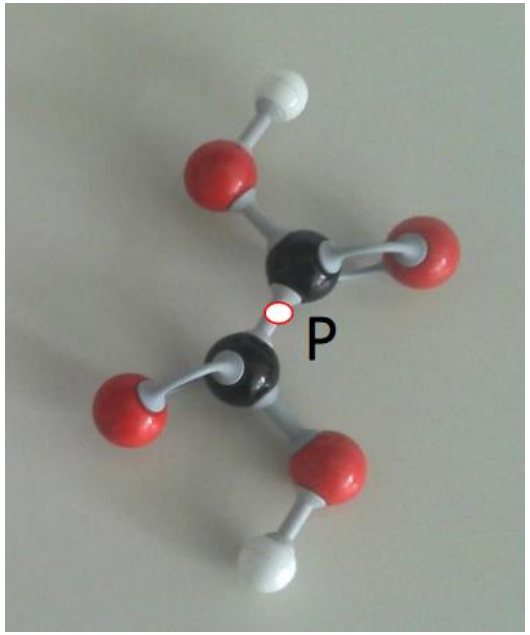
$$d180 \circ d180 = 0$$
$$d180 \circ 0 = d180$$
$$i \circ 0 = i$$

Und man rechnet auch schnell nach, dass:

$$i \circ i = 0$$

In dieser Symmetriegruppe ist also $d180$ invers zu sich selbst und auch i ist das inverse Element von i.

Symmetriegruppen



Die Ergebnisse der Verknüpfung von Gruppenelementen werden in einer sogenannten Verknüpfungstafel aufgeführt. Für die Symmetriegruppe von Oxalsäure gilt bisher:

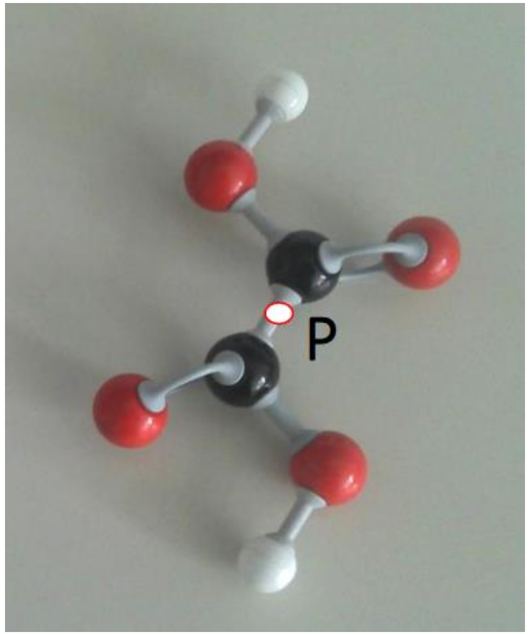
∘	0	d180	i
0	0	d180	i
d180	d180	0	
i	i		0

Diese Tafel hat noch Lücken. Was ergibt die folgende Verknüpfung?

$$i \circ d180 = \cdots$$

Machen Sie sich das mit Hilfe irgendeines Gegenstandes (nicht Oxalsäure) klar. Was für eine Symmetrieoperation entsteht durch Punktspiegelung gefolgt von Drehung? Nicht leicht zu beantworten!

Symmetriegruppen



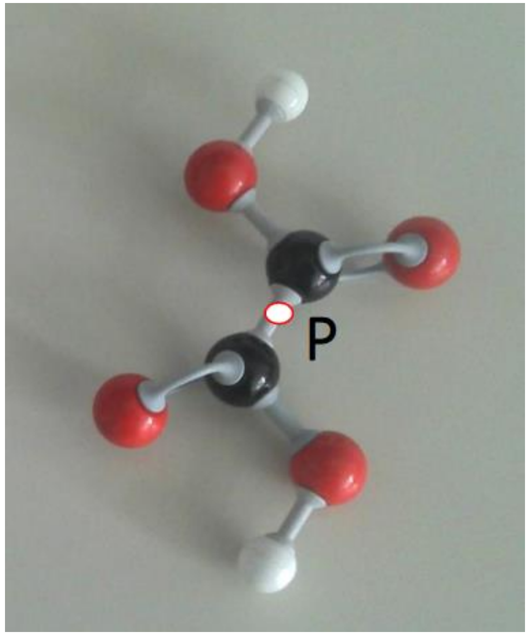
Welches Element ergibt die folgende Verknüpfung?

$$i \circ d180 = \cdots$$

∘	0	d180	i
0	0	d180	i
d180	d180	0	
i	i		0

Weiterführende Informationen

Symmetriegruppen



Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen = „Sudoku" spielen, um die Tabelle auszufüllen!

°	0	d180	i	sh
0	0	d180	i	sh
d180	d180	0		
i	i		0	
sh	sh			0

Eine einfache Gleichung lösen

$10 + (3 \cdot x) = x \cdot 8$

Schauen Sie sich an, wie ein Körper definiert ist:

Link zur Definition eines Körpers

Danach versuchen Sie -Schritt für Schritt- die obige Gleichung nach x aufzulösen.
Welche Rechengesetze (inverse Elemente bezüglich Addition/Multiplikation, neutrales Element der Addition/Multiplikation, Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz) wenden Sie an welcher Stelle an? Die Klammern in der Gleichung oben müssen Sie nicht schreiben, wenn Sie festlegen, dass „Punktrechnung-vor-Strichrechnung" gilt.

Eine einfache Gleichung lösen

$10 + (3 \cdot x) = x \cdot 8$

$$\Leftrightarrow -(3 \cdot x) + \big(10 + (3 \cdot x)\big) = -(3 \cdot x) + (x \cdot 8) \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow -(3 \cdot x) + \big((3 \cdot x) + 10\big) = -(3 \cdot x) + (8 \cdot x) \qquad (2)$$
$$\Leftrightarrow \big(-(3 \cdot x) + (3 \cdot x)\big) + 10 = -(3 \cdot x) + (8 \cdot x) \qquad (3)$$
$$\Leftrightarrow \big(-(3 \cdot x) + (3 \cdot x)\big) + 10 = (-3 \cdot x) + (8 \cdot x) \qquad (4)$$
$$\Leftrightarrow 0 + 10 = (-3 + 8) \cdot x \qquad (5)$$
$$\Leftrightarrow 10 = 5 \cdot x \qquad (6)$$

Endliche Körper

+	0	d180	i	sh
0	0	d180	i	sh
d180	d180	0	sh	i
i	i	sh	0	d180
sh	sh	i	d180	0

Das war die Symmetriegruppe der Oxalsäure. Es ist eine Gruppe mit vier Elementen. Es gibt nicht nur endliche Gruppen, sondern auch endliche Körper.
Endliche Körper spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle (Verschlüsselung von Nachrichten, Logik, Beweisbarkeit, Lösen von Polyomgleichungen)

Endliche Körper

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[0]	[3]	[2]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[2]	[1]	[0]

Zunächst nennen wir die Elemente der Gruppe um, damit es etwas übersichtlicher wird.

Endliche Körper

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[0]	[3]	[2]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[2]	[1]	[0]

*	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]		
[3]	[0]	[3]		

Neben der Addition muss es auch noch eine Multiplikation geben, zu der wir wiederum eine Verknüpfungstafel aufschreiben. Multiplikationen mit [0] und [1] sind schnell ausgerechnet. Fehlen noch vier Felder…
Sie wissen: Die Multiplikation muss eine abelsche Gruppe (ohne die [0]) ergeben. Außerdem muss die „Sudoku"-Regel gelten. Füllen Sie die vier Felder, so dass Sie einen Körper mit 4 Elementen erhalten!

Endliche Körper

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[0]	[3]	[2]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[2]	[1]	[0]

*	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[3]	[1]
[3]	[0]	[3]	[1]	[2]

Dieses ist der gesuchte Köper mit vier Elementen. In diesem Körper kann man ebenfalls unter Ausnutzung der Rechenregeln, Gleichungen nach x auflösen. (Wie findet man dabei die Inversen Elemente?) Lösen Sie durch Umformungen die folgende Gleichung nach x auf:

$$[1] + ([2] \cdot x) = x \cdot [3]$$

Eine einfache Gleichung lösen

$[1] + ([2] \cdot x) = x \cdot [3]$

$\Leftrightarrow -([2] \cdot x) + \big([1] + ([2] \cdot x)\big) = -([2] \cdot x) + (x \cdot [3])$	(1)	Existenz eines add. Inversen
$\Leftrightarrow -([2] \cdot x) + \big(([2] \cdot x) + [1]\big) = -([2] \cdot x) + ([3] \cdot x)$	(2)	Kommutativgesetze
$\Leftrightarrow \big(-([2] \cdot x) + ([2] \cdot x)\big) + [1] = -([2] \cdot x) + ([3] \cdot x)$	(3)	Assoziativgesetz der Add.
$\Leftrightarrow \big(-([2] \cdot x) + ([2] \cdot x)\big) + [1] = (-[2] \cdot x) + ([3] \cdot x)$	(4)	Berechnung mult. Inverse
$\Leftrightarrow [0] + [1] = (-[2] + [3]) \cdot x$	(5)	Addition/Distributivgesetz
$\Leftrightarrow [1] = ([2] + [3]) \cdot x$	(6)	Berechnung add. Inverse
$\Leftrightarrow [1] = [1] \cdot x$	(7)	Nachlesen [2]+[3]
$\Leftrightarrow [1] = x$	(8)	[1] ist neutral bei Multipl.