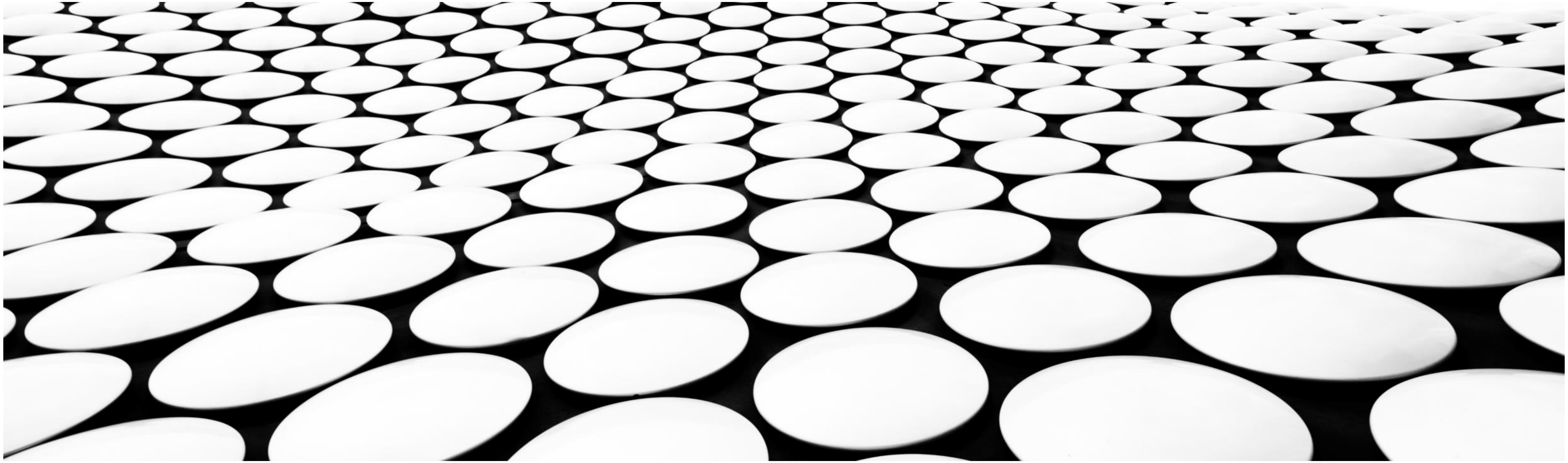
MATHEMATIK I

KOMPLEXE ZAHLEN



WIEDERHOLUNG: KÖRPER

Bruchzahlen: $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$

Reelle Zahlen: $\ldots xxxxxx, xxxxx \overset{\infty}{\ldots} \in \mathbb{R}$, wobei x beliebige Ziffern

Welche Zahlen gibt es?

WIEDERHOLUNG: POLYNOME

Sie haben gelernt, dass sich Polynome als Summe von Monomen oder auch als Produkt von Linearfaktoren darstellen lassen. Dazu muss man alle Nullstellen des Polynoms bestimmen. Finden Sie mit Hilfe der p-q-Formel alle Nullstellen des folgenden Polynoms und zerlegen Sie dieses in seine beiden Linearfaktoren:

$$X^2 + 2X + 5$$

IMAGINÄRE EINHEIT / KOMPLEXE ZAHLEN

p-q-Formel anwenden:

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= -1 \pm 2 \cdot \sqrt{-1} = -1 \pm 2i$$

$$X^2 + 2X + 5 = (X - x_1)(X - x_2) = (X - (-1 + 2i)) \cdot (X - (\underbrace{-1 - 2i}))$$

Weiterführende Informationen

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$:

$a + ib$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$

a= Realteil, b= Imaginärteil

KOMPLEXE ZAHLEN ALS KÖRPER

Für komplexe Zahlen gelten alle Rechenregeln eines Körpers (und zusätzlich $i^2 = -1$). Eine komplexe Zahl hat ein Inverses bezüglich der Addition

$$-(x+iy) = -x - iy, \qquad z.B.\ \ -(5+6i) = -5-6i$$

und (sofern nicht x und y Null sind) auch ein Inverses bezüglich der Multiplikation

$$(x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad z.B. \quad (5+6i)^{-1} = \frac{5}{61} - \frac{6}{61}\,i$$

DIVISION KOMPLEXER ZAHLEN / KONJUGIERT KOMPLEXE ZAHL

Will man zwei komplexe Zahlen durcheinander teilen, dann erweitert man am besten den entsprechenden Bruch mit dem Nenner, wobei man das Vorzeichen des Imaginärteils umkehrt (Konjugation genannt).
Die zu $a + ib$ konjugiert komplexe Zahl lautet $a - ib$.

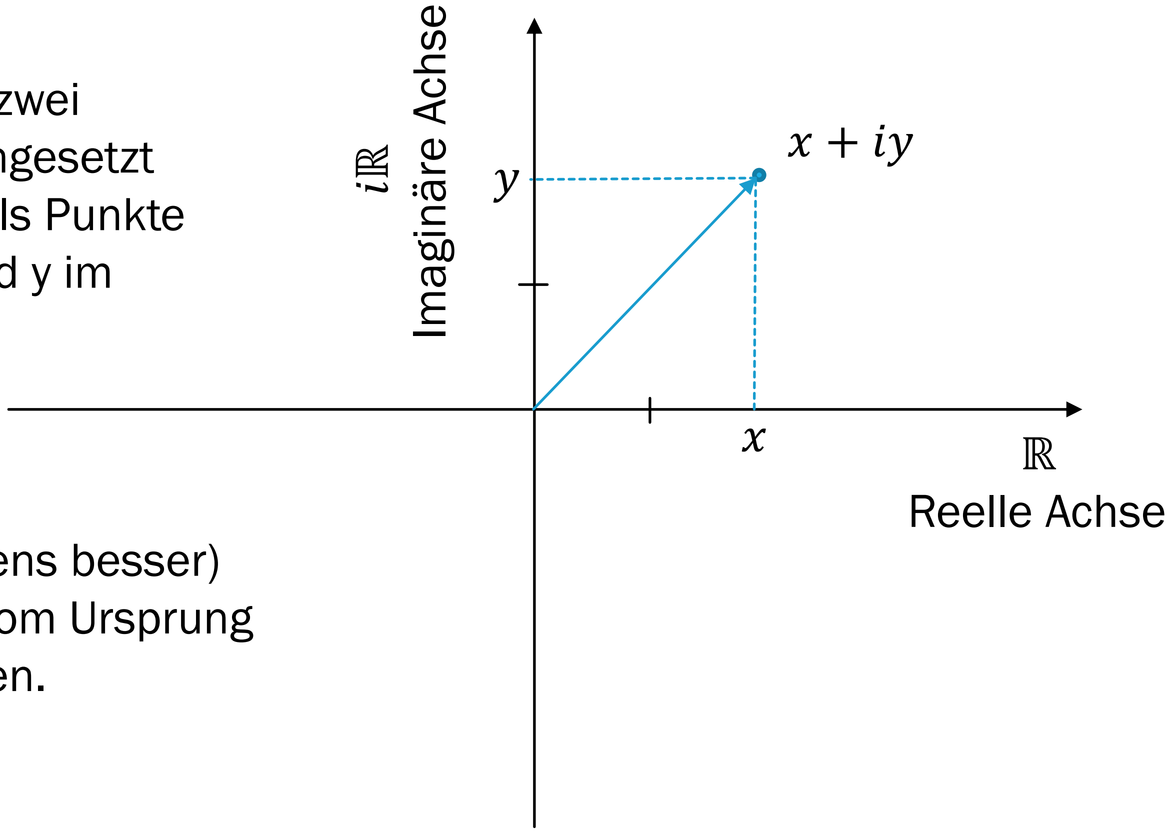
Beispiel:

$$(5+6i):(1+2i) = \frac{5+6i}{1+2i} = \frac{(5+6i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5+6i-10i+12}{1+4} = \frac{17}{5} - \frac{4}{5}i,$$

wobei man im Nenner die 3. binomische Formel anwenden kann und stets $i^2 = -1$ berücksichtigen muss.
Auf diese Weise habe ich auch das Inverse ausgerechnet als 1 geteilt durch x+iy.

KOMPLEXE ZAHLENEBENE / KOMPLEXE ZAHLEN ALS ZEIGER

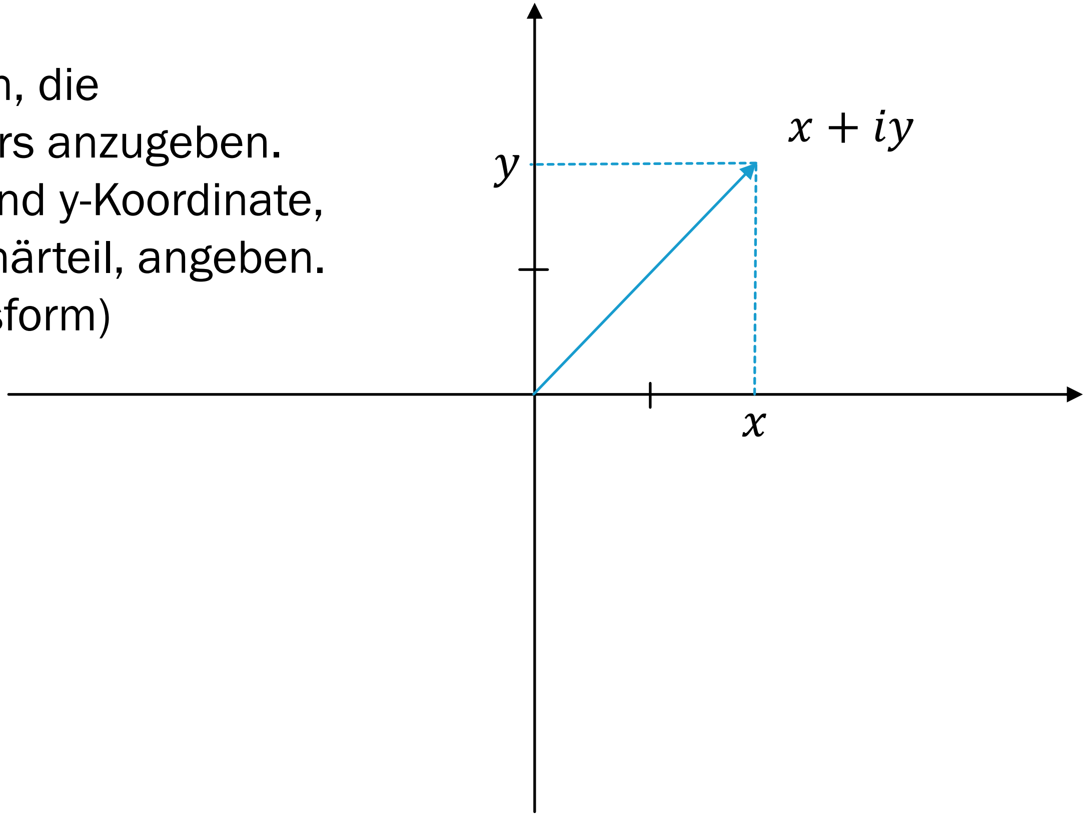
Da komplexe Zahlen aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzt sind, kann man sie sich als Punkte mit den Koordinaten x und y im 2D-Raum vorstellen....



...oder (und das ist meistens besser) als Pfeile (Vektoren) die vom Ursprung zu diesem 2D-Punkt zeigen.

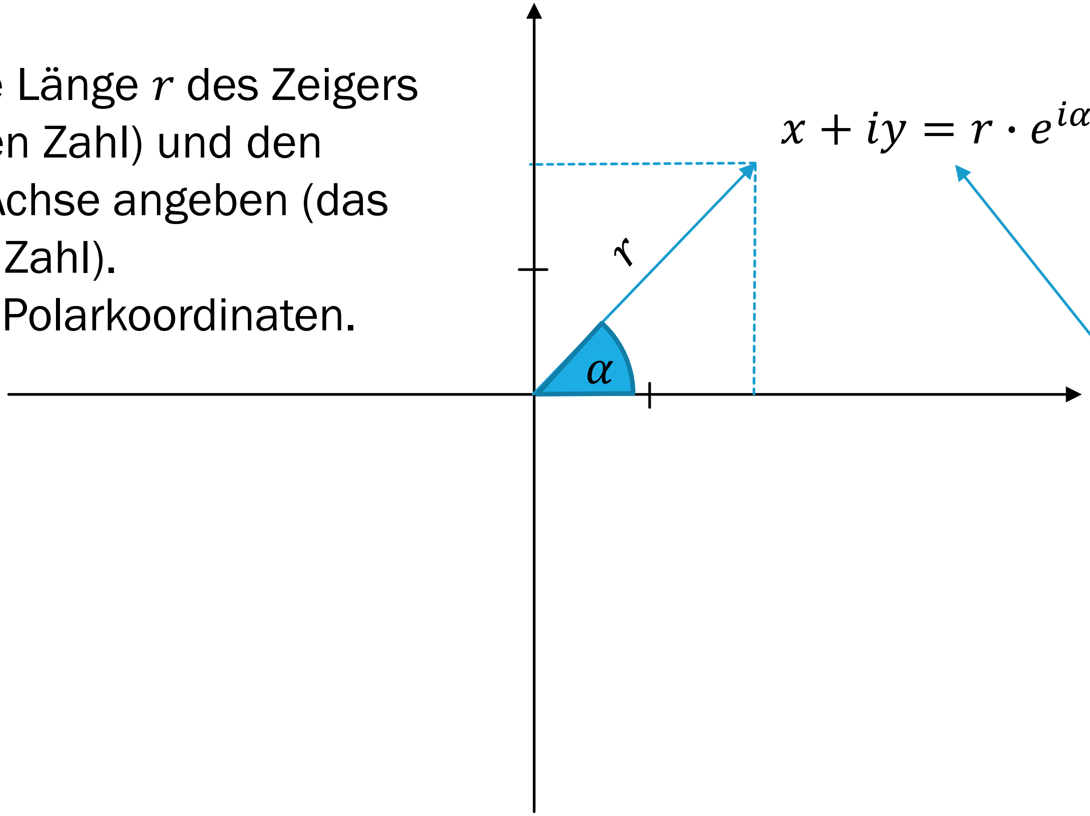
KOMPLEXE ZAHLENEBENE / KOMPLEXE ZAHLEN ALS ZEIGER

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Koordinaten dieses Zeigers anzugeben. Einmal kann man die x- und y-Koordinate, also den Real- und Imaginärteil, angeben. (Kartesische Darstellungsform)



KOMPLEXE ZAHLENEBENE / KOMPLEXE ZAHLEN ALS ZEIGER

Und einmal kann man die Länge r des Zeigers (den *Betrag* der komplexen Zahl) und den Winkel α mit der reellen Achse angeben (das *Argument* der komplexen Zahl).
Das ist die Darstellung in Polarkoordinaten.



$$x + iy = r \cdot e^{i\alpha}$$

Damit diese (noch im Laufe des Semersters zu zeigende) Gleichheit gilt, muss der Winkel α in Bogenmaß angegeben werden. e ist die Eulersche Zahl.

EXKURS: BOGENMASS

Bitte beachten Sie, dass bei der Berechnung der Winkelfunktionen nicht in Grad (0° bis 360° bzw. -180° bis 180°), sondern in Bogenmaß gerechnet wird (0 bis 2π bzw. –π bis π). Stellen Sie Ihren Taschenrechner auf „radian“ um!

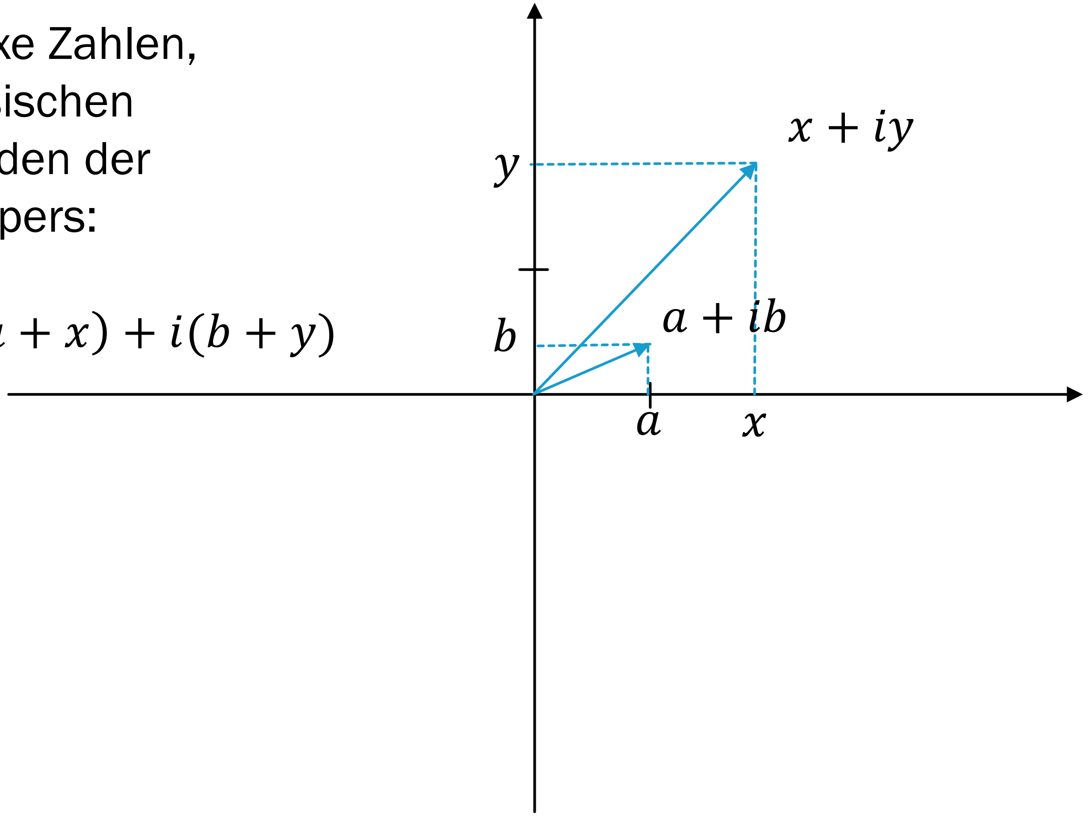
Hier die Erklärung, was Bogenmaß ist (sehr einfach erklärt):

Winkelmaß und Bogenmaß

GRUNDRECHENARTEN ALS GEOMETRISCHE OPERATIONEN

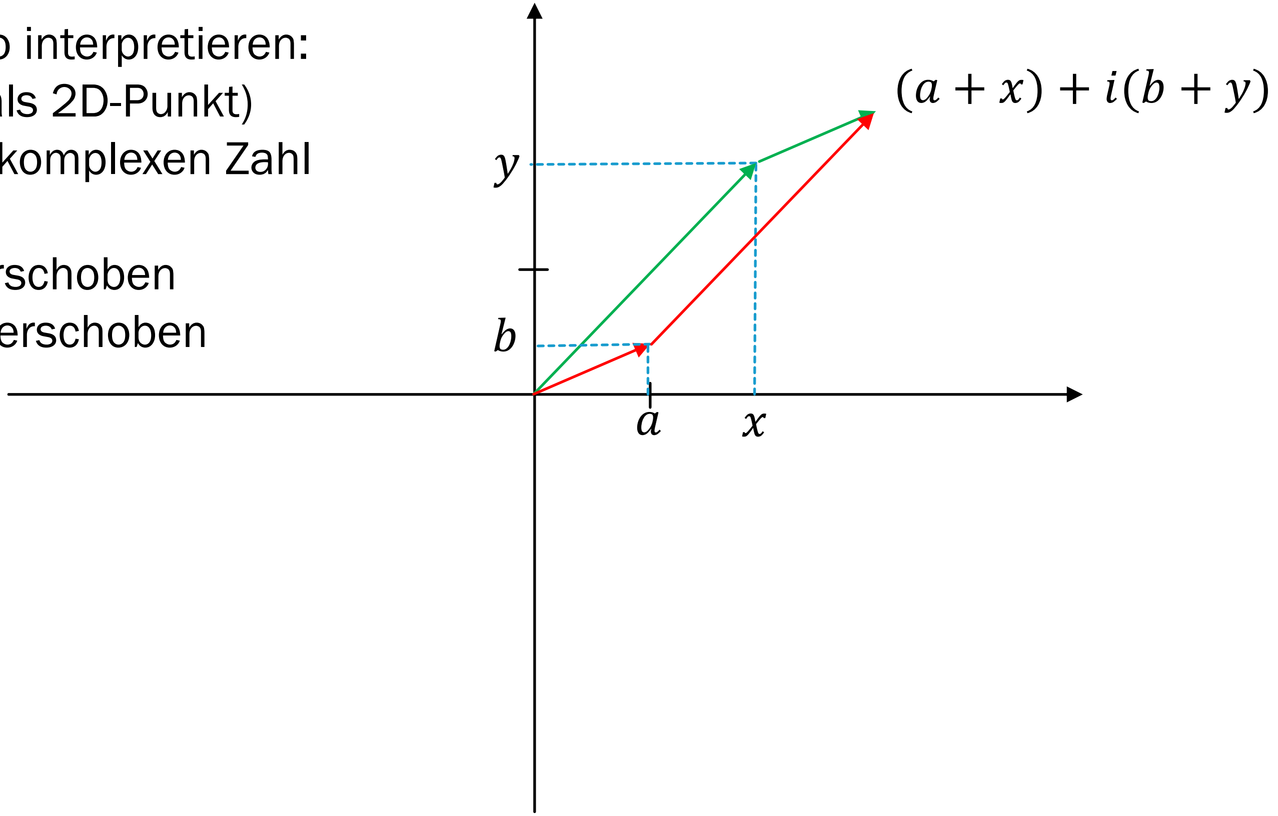
Addiert man zwei komplexe Zahlen, dann am besten in kartesischen Koordinaten unter Anwenden der Rechengesetze eines Körpers:

$$(a+ib)+(x+iy)=(a+x)+i(b+y)$$



GRUNDRECHENARTEN ALS GEOMETRISCHE OPERATIONEN

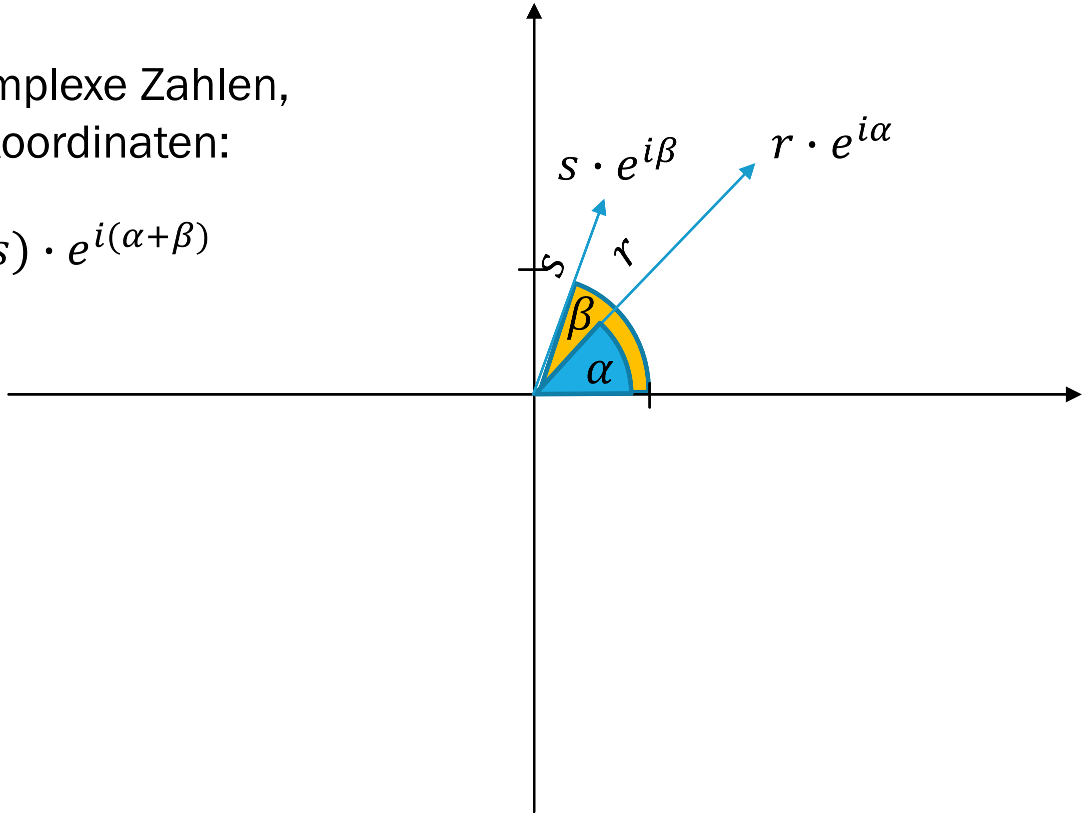
Das Ergebnis lässt sich so interpretieren:
Die eine komplexe Zahl (als 2D-Punkt) wird mit Hilfe der andren komplexen Zahl (als Vektor) verschoben.
Rot: a+ib wird mit x+iy verschoben
Grün: x+iy wird mit a+ib verschoben



GRUNDRECHENARTEN ALS GEOMETRISCHE OPERATIONEN

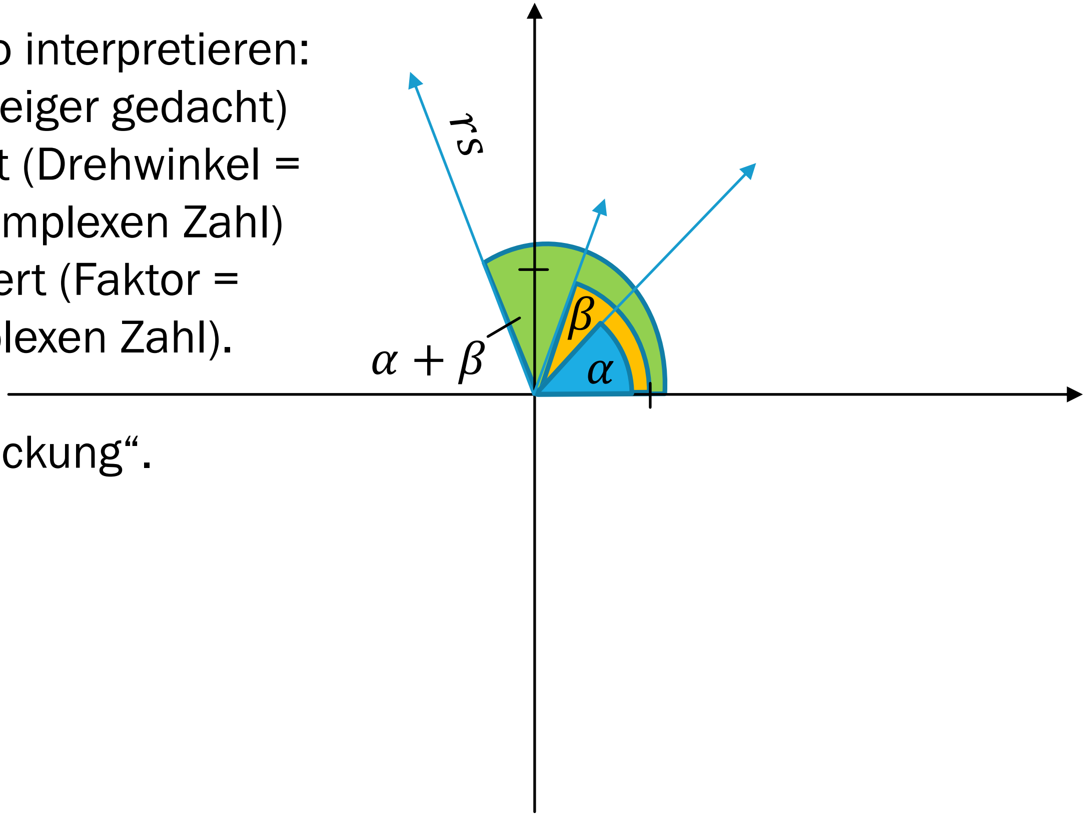
Multipliziert man zwei komplexe Zahlen, dann am besten in Polarkoordinaten:

$$(r \cdot e^{i\alpha}) \cdot (s \cdot e^{i\beta}) = (r \cdot s) \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$$



GRUNDRECHENARTEN ALS GEOMETRISCHE OPERATIONEN

Das Ergebnis lässt sich so interpretieren: Eine komplexe Zahl (als Zeiger gedacht) wird am Ursprung gedreht (Drehwinkel = Argument der anderen komplexen Zahl) und ihre Länge wird skaliert (Faktor = Betrag der anderen komplexen Zahl).



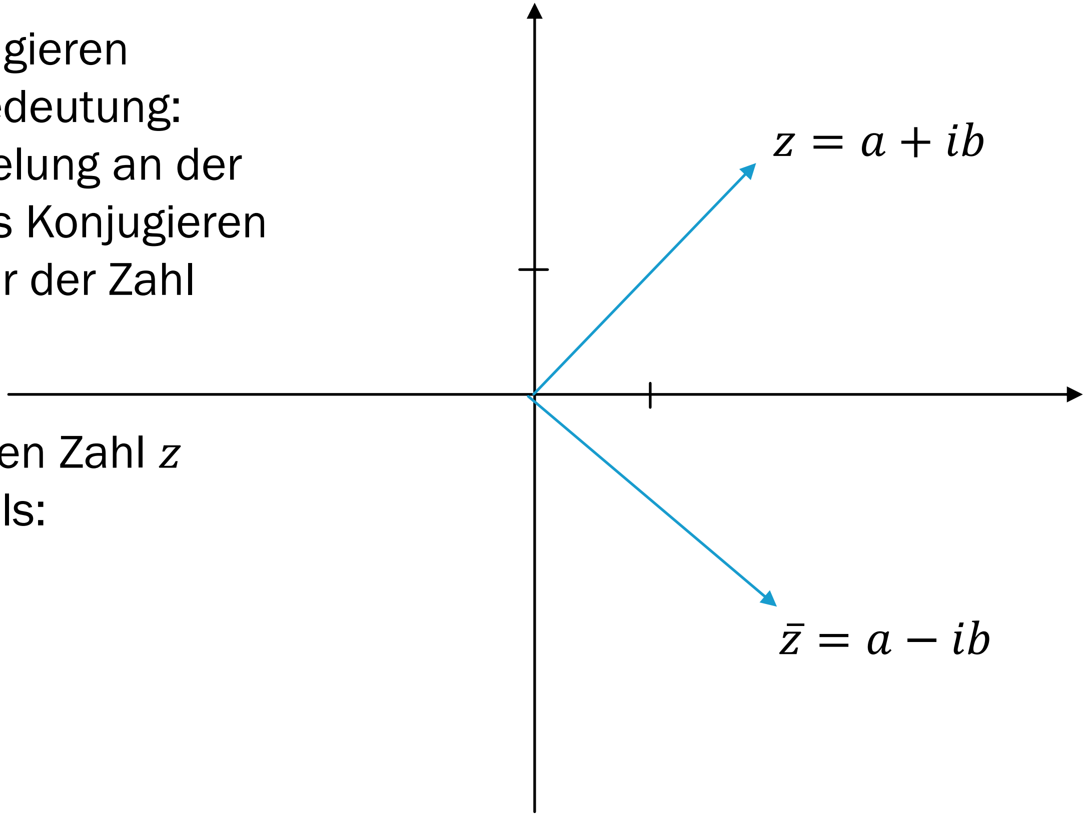
Insgesamt eine „Drehstreckung“.

GRUNDRECHENARTEN ALS GEOMETRISCHE OPERATIONEN

Auch das komplexe Konjugieren
hat eine geometrische Bedeutung:
Es entspricht einer Spiegelung an der
reellen Achse. Komplexes Konjugieren
wird mit einem Strich über der Zahl
symbolisiert.

Der Betrag einer komplexen Zahl z
lässt sich auch rechnen als:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$



GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER GRUNDRECHENARTEN

Auf diese Weise entsprechen die Grundrechenarten und auch das komplexe Konjugieren geometrischen Operationen (Verschiebung, Drehstreckung, Spiegelung). Sehen Sie sich dazu auch folgendes Video an:

Komplexe Zahlen erklärt

Jetzt gibt es also zwei Arten, wie geometrische Operationen in den Naturwissenschaften behandelt werden. Zum einen können wir Symmetrieoperationen in 3D von (z.B.) Molekülen als Elemente von Symmetriegruppen auffassen. Andererseits können wir bestimmte geometrische Operationen in 2D durch die vier Grundrechenarten und komplexe Zahlen ausdrücken.

Konzepte für Symmetrieoperationen

KOMPEXES WURZELZIEHEN

Eine n-te Wurzel einer komplexen Zahl $z = re^{i\alpha}$ berechnet man ebenfalls am besten mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\alpha}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\alpha}{n}}$$

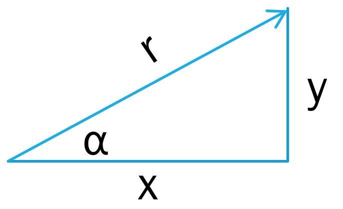
Da jedoch der Winkel α das Gleiche ist wie der Winkel $\alpha + 2\pi k$, für ganze Zahlen k, gibt es zu jeder n-ten Wurzel einer komplexen Zahl n verschiedene Lösungen. Also es gibt stets n verschiedene komplexe Zahlen w, für die gilt $w^n = z$. Diese sind wegen der "$(\alpha + 2\pi k)$-Geschichte“:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}; k = 0, \dots, n-1\right\}.$$

So sind z.B. die drei dritten Wurzeln aus z=1 (für dieses z gilt: Betrag r=1, Argument α= 0):

$\sqrt[3]{1} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$. Rechnen Sie die Winkel $0, \frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ in Winkelmaß um! Wo liegen diese im Einheitskreis?

UMRECHNUNGSFORMELN



Alternativer Zugang

Um zwischen den beiden Darstellungsformeln der komplexen Zahlen umrechnen zu können, müssen Sie den Satz des Pythagoras wissen und sich mit Winkelfunktionen auskennen. Es gilt:

$$re^{i\alpha} = \underbrace{r \cdot \cos(\alpha)}_{x} + i\ \underbrace{r \cdot \sin(\alpha)}_{y} = x + iy$$

Und umgekehrt:

Pythagoras: Länge des Zeigers

Umkehrung von x=r cos(α) und Vorzeichen des Winkels beachten.

$$x + iy = r \cdot e^{i\alpha}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \operatorname{sgn}(y),$$

dabei ist acos (arcus cosinus) die Umkehrfunktion des Kosinus (meistens mit „INV COS" auf den Taschenrechner zu bekommen) und sgn die Signumfunktion. Ist $y \geq 0$, dann ist $\operatorname{sgn}(y) = 1$, sonst ist $\operatorname{sgn}(y) = -1$.

EINIGE WICHTIGE FORMELN

In dem folgenden Link sind noch einmal die wichtigsten Formeln hinterlegt:

Wichtige Formeln

Jetzt sind Sie fit für den Übungszettel!

KOMPLEXE ZAHLEN UND GEOMETRIE

Komplexe Zahlen spielen eine sehr große Rolle in der ebenen Geometrie (wie Sie sich vielleicht schon denken können). Diese Rolle geht weit über das Anwenden von Symmetrieoperationen hinaus. Das ist auch der Grund dafür, warum heutzutage faste keine Sätze der Elementargeometrie aus der Antike mehr gelehrt werden (wer kenn schon den Satz von Pappos oder von Menelaos?). Heute „rechnet“ man Geometrie, anstatt sie zu konstruieren.

Bitte schauen Sie sich die folgende interaktive Grafik an (Satz von Napoleon… gemeint ist tatsächlich DER Napoleon Bonaparte): Link zu GeoGebra

Dann laden Sie sich das folgende Dokument runter und hören Sie sich dazu die Audiokommentare an!

Beweis des Satzes