MATHEMATIK I

Grenzwerte von Folgen / Fixpunktverfahren

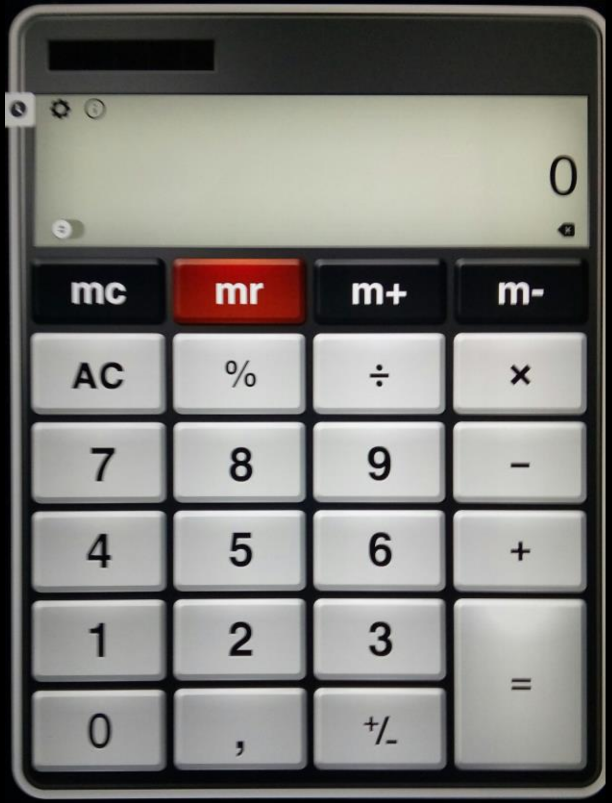
MOTIVATION

Können Sie die Wurzel aus 3 berechnen (mit vier Nachkommastellen)?

$$\sqrt{3}$$

Brauchen Sie einen Taschenrechner hierfür?

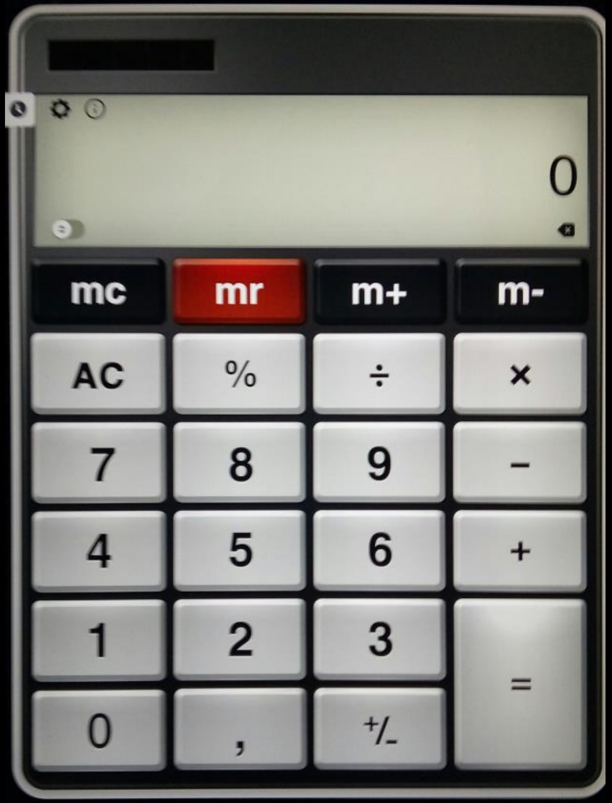
MOTIVATION



Bitteschön!

Aber damit geht es auch nicht! Dieser Rechner kennt ja nur die Grundrechenarten…

MOTIVATION



Für Interessierte: Was hat Abu Dschaʿfar Muhammad ibn Musa al-Chwārizmī damit zu tun?

[Wortherkunft "Algorithmus"]

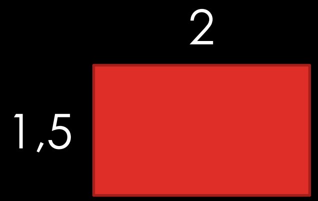
[Wortherkunft "Algebra“]

[Rechenung auff der Linihen und Federn... (1522)]

BABYLONISCHES WURZELZIEHEN

Die Bestimmung der Wurzel aus der Zahl 3 ist gleichbedeutend mit dem Problem, die Kantenlänge eines Quadrats zu bestimmen, dessen Flächeninhalt 3 ist.

Fangen wir mit einer Startschätzung an: Die Wurzel aus 3 ist ungefähr 2. Will man nun ein Rechteck konstruieren, das den Flächeninhalt 3 hat, wobei aber eine Kantenlänge diese geschätzte 2 ist, so erhalten wir folgendes Objekt:



Der Flächeninhalt passt also schonmal, aber es ist kein Quadrat.

BABYLONISCHES WURZELZIEHEN

Also bestimmen wir den Mittelwert (arithmetisches Mittel) aus den beiden Kantenlängen (2+1,5)/2=1,75

Und zeichnen wieder ein Rechteck, dessen eine Kantenlänge nun 1,75 ist.

$$\frac{7}{4} = 1{,}75$$

$$\frac{12}{7} \approx 1{,}71429$$

Der Flächeninhalt passt also wieder, aber es ist kein Quadrat… aber schon mehr ein Quadrat als im vorangehenden Schritt.

Also nochmal… Mittelwert bilden (7/4+12/7)/2=97/56 und das Rechteck:

BABYLONISCHES WURZELZIEHEN

$$\frac{97}{56} \approx 1{,}73214$$

$$\frac{168}{97} \approx 1{,}73196$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$$

Jetzt kann man das Gebilde mit bloßem Auge fast gar nicht mehr von einem Quadrat unterscheiden und es hat den Flächeninhalt 3. Auf diese Weise nähern wir uns mehr und mehr der Wurzel aus 3. Je mehr Schritte von diesem Verfahren man macht, desto genauer wird das Ergebnis.

Wird ausgehend von der Startschätzung 2, jemals die Wurzel aus 3 exakt erreicht? Überlegen Sie!

RATIONALE ZAHLEN ALS KÖRPER

Nein. Denn wenn man eine rationale Zahl (Bruchzahl) als Startwert eingibt, kommt in jedem Schritt wieder eine Bruchzahl raus (Abgeschlossenheit der rationalen Zahlen als Körper bezüglich der vier Grundrechenarten). Weiterhin ist die Wurzel aus drei keine rationale Zahl (erster Übungszettel, 4. Aufgabe).

Dieses Verfahren geht auch mit 3-ten Wurzeln und dem zu konstruierenden Würfel bzw. den Quadern. Hier gibt man zwei (gleiche) Kantenlängen vor und berechnet die fehlende Kantenlänge so, dass das Volumen passt. Für den nächsten Schritt bestimmt man das arithmetische Mittel. Überlegen Sie sich die Formel, wie man aus einer Startschätzung den verbesserten Wert erhält!

ITERATIONSVORSCHRIFT

Das gesamte Verfahren lässt sich auch in Formelsprache schreiben. Um die k-te Wurzel aus einer Zahl z zu bestimmen, beginnt man mit einer (Start)Schätzung x_0 für das Ergebnis (in dem Beispiel war k=2, z=3 und x_0=2).

Dann bestimmt man daraus eine bessere Schätzung x_1 für die Wurzel mit einer Formel. Sie berechnet das arithmetisches Mittel aus der zum Volumen z passenden, ergänzten Kantenlänge und den (k-1) vorgegebenen gleichen Kantenlängen:

$$x_1 = \frac{1}{k}\left(\frac{z}{x_0^{k-1}} + (k-1)\, x_0\right)$$

ITERATIONSVORSCHRIFT

Hat man nun die erste Iterierte x_1 so bestimmt, dann folgen weitere Iterierte nach dem gleichen Schema. Man setzt also x_n in obige Formel ein, um x_{n+1} zu erhalten. Also $x_{n+1} = \phi(x_n)$ mit der Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{z}{x^{k-1}} + (k-1)\,x\right).$$

Alles, was man rechnen können muss, sind also die vier Grundrechenarten (es gibt ja nur ganzzahlige Exponenten). AHA!!!!! Das können wir also auch mit komplexen Zahlen machen! Probieren Sie es mit einer dritten Wurzel aus 1 aus! Der Startwert soll -1+i sein!

FIXPUNKT

Schauen Sie sich dazu den folgenden verlinkten Zettel an!

Zauberformel

Auf diesem Zettel wird das Verfahren einmal für eine frei gewählte komplexe Zahl als Startwert durchgeführt. Und es wird gezeigt, dass für einen Fixpunkt x dieses Verfahrens tatsächlich –so wie gewünscht- gilt: $x^k = z$. Die Funktion ϕ ist also so gebastelt, dass ein Fixpunkt dieser Funktion die gestellte Aufgabe löst.

Fixpunkt heißt: Setze ich x in die Formel ein, kommt x wieder raus.

Aber nähert sich dieses Verfahren IMMER einem Fixpunkt, oder war das nur Zufall in den gezeigten Beispielen?

FIXPUNKT

Über die Iterationsvorschrift des Babylonischen Wurzelziehens wird eine Folge von Zahlen (geschrieben als (x_n)) definiert

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + x\right) \qquad x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{7}{4}, \quad x_2 = \frac{97}{56}, \ldots$$

Die Iterationsvorschrift („Zauberformel“) hat zwei verschiedene Fixpunkte, nämlich alle Wurzeln von 3 (also $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$). Setzen Sie mal diese beiden Zahlen in die Iterationsvorschrift ϕ ein! [So wie die entsprechende Iterationsvorschrift für die dritte Wurzel aus 1 drei verschiede Fixpunkte hat: $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$, wenn man auch komplexe Zahlen berücksichtigt]. Wichtig ist also die Frage, unter welchen Bedingungen an den Startwert und die Iterationsvorschrift, das Verfahren sich einem dieser Fixpunkte beliebig nah annähert. Denn durch das häufigere Anwenden der Iterationsformel, soll ja die Näherungslösung besser und besser und besser … werden.

FIXPUNKTVERFAHREN

Fixpunktverfahren sind in der modernen Mathematik DAS Verfahren der Wahl, um gegebene Aufgaben mit Hilfe des Rechners zu lösen. Heutzutage werden fast alle mathematischen Probleme mit Hilfe solcher Verfahren (numerisch) gelöst. Daher wollen wir hier die Theorie dieser Verfahren behandeln.

Wichtig ist also, ob eine so konstruierte Folge von Zahlen einen „Grenzwert“ hat…

Standard-Lehrinhalte, von denen ich hier abweichen möchte
(kann ja nicht schaden, das auch zu kennen)

Die Aufgaben 2 a)-c) auf dem Übungszettel beziehen sich auf diese Inhalte
Sie können diese Folien auch erst einmal überspringen

FORMALISMUS VON BOLZANO, CAUCHY UND WEIERSTRASS

Wie drückt die Mathematik den Satz „Die Folge kommt einem Wert beliebig nahe“ in Formelsprache aus? Wann hat eine Folge einen Grenzwert (limes)?

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}: \; |x_n - x| < \varepsilon, \text{ für alle } n > N$$

FORMALISMUS VON BOLZANO, CAUCHY UND WEIERSTRASS

Als einfaches Beispiel, wie diese Definition verwendet wird, nehmen wir die Folge (x_n), bei der eine Vorschrift gegeben ist, wie die Folgenglieder x_n von dem Index n abhängen sollen, nämlich: $x_n = \frac{1}{n}$. Die Folge startet bei $x_1 = 1$. Dieses ist eine sogenannte „Nullfolge“. Je größer das n wird, desto näher kommt die Folge der Zahl x=0, sie konvergiert gegen Null (hat den Grenzwert Null). Wie sehen wir das?

Wir geben uns irgendeine Genauigkeit $\varepsilon > 0$ vor. Ab welchem Index N ist dann der Abstand der Folgenglieder x_n zu x=0 kleiner als ε? Antwort: Wenn wir eine natürliche Zahl nehmen, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$, dann ist die Folge ab diesem Index immer näher an x dran als unsere vorgegebene Genauigkeit ε verlangt. So zeigen wir, dass die Folge den gegebenen Grenzwert hat… Für jede vorgegebene Genauigkeit finden wir einen Index N, ab dem der Fehler kleiner als diese Genauigkeit ist.

Standard-Lehrinhalte, von denen ich hier abweichen möchte

LEHRBUCH-THESEN

Nicht jede Folge hat einen Grenzwert!! Manche Folgen „hauen ab ins Unendliche“ oder „gehen auf und ab, ohne gegen einen Wert zu streben“…

In diesem Dokument ist zusammengefasst, welche Zusammenhänge über Zahlenfolgen und die Existenz eines Grenzwertes in den meisten Lehrbüchern übereinstimmend gelehrt werden:

- Zunächst wird festgestellt, dass Folgen, die monoton sind (also mit jedem Schritt größer bzw. mit jedem Schritt kleiner werden), aber insgesamt nach oben und unten beschränkt sind, einen Grenzwert haben müssen. Die Pfeile im Dokument zeigen in welche Richtung man schlussfolgern kann.
- Hat eine Folge einen Grenzwert, dann hat auch jede Teilfolge (z.B. betrachtet man nur jedes k-te Glied der Folge, oder die Folge erst ab dem k-ten Index) diesen Grenzwert.
- Wenn eine konvergente Folge (konvergent = „hat einen Grenzwert“) von zwei anderen konvergenten Folgen eingeschlossen wird, dann wird auch deren Grenzwert durch die beiden andren Grenzwerte eingeschlossen.

LEHRBUCH-THESEN

Diese Aussagen sind jedoch oft wenig hilfreich, da Relationen wie „größer als“, die man braucht, um zum Beispiel Monotonie zu charakterisieren, nicht für komplexe Zahlen angewendet werden können. Bei zwei ungleichen komplexen Zahlen kann man nicht sagen, welche Zahl größer und welche Zahl kleiner ist (für den Betrag von komplexen Zahlen kann man das natürlich sagen, aber nicht für die Zahlen selbst).

Eine weitere hilfreichere Theorie über Grenzwerte besagt, dass die Summe (Differenz, Produkt, Quotient) von zwei konvergenten(!) Folgen auch wieder eine konvergente Folge ergibt und, dass der Grenzwert dann einfach die Summe (Differenz, Produkt, Quotient) der Grenzwerte dieser Folgen ist.

In diesem Video wird gezeigt, wieso dieses hilfreich ist, und wie man Grenzwerte von Folgen ausrechnen kann, bei denen man weiß, wie die Werte der Folgenglieder x_n von dem Index n abhängen, was aber bei uns nicht direkt der Fall ist. Unsere Folgen sind rekursiv erklärt. x_n ist nicht in Abhängigkeit von n definiert, sondern ergibt sich aus dem vorangegangenen Folgeglied x_{n-1}.

Daher wird die hier behandelte Theorie über Folgen von den Lehrbuchinhalten abweichen.

Das möchte ich eigentlich hier vermitteln…

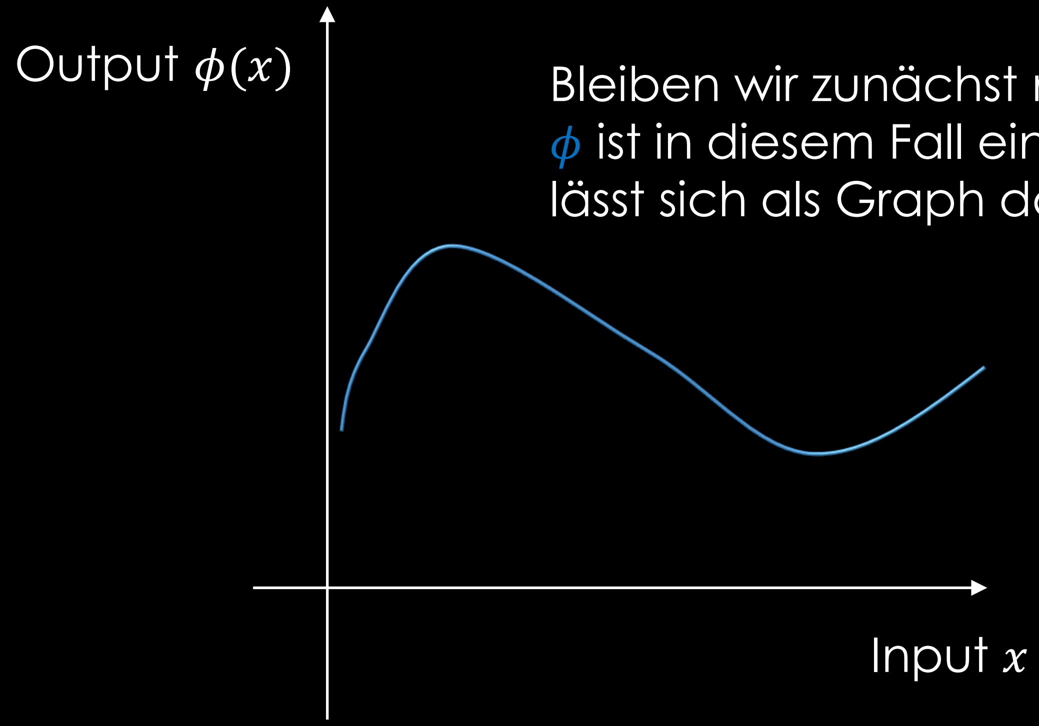
THEORIE DER FIXPUNKTITERATIONEN

Laden Sie sich den Inhalt des folgenden Dokuments herunter. In den folgenden Folien und Grafiken werde ich auf die einzelnen Fragen eingehen, die in diesem Dokument angesprochen werden. Denken Sie dabei z.B. an die Berechnung der Wurzel aus 3 aus dem ersten Beispiel und an die verwendete Iterationsfunktion:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + x\right)$$

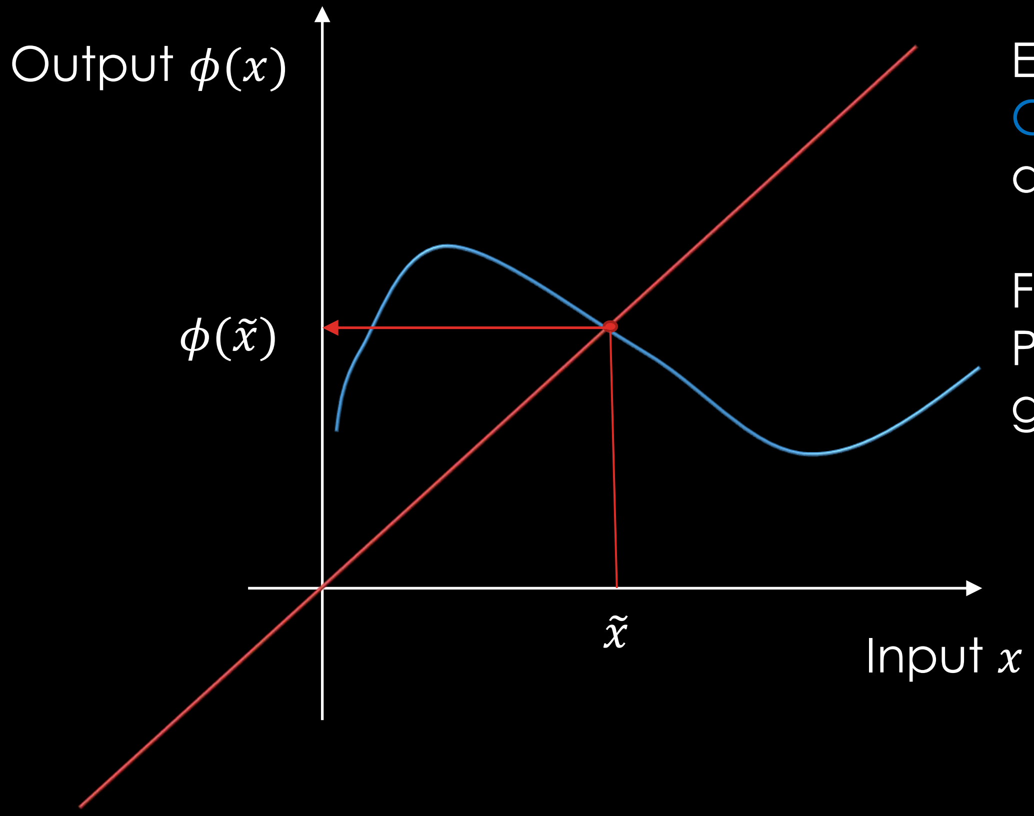
Hat ϕ einen Fixpunkt?

Bleiben wir zunächst mal bei reellen Zahlen.
ϕ ist in diesem Fall eine reelle Funktion und lässt sich als Graph darstellen:



Ein Fixpunkt von ϕ lässt sich als Schnittpunkt dieses Graphen und einer Geraden bestimmen. Welcher Geraden?

Hat ϕ einen Fixpunkt?



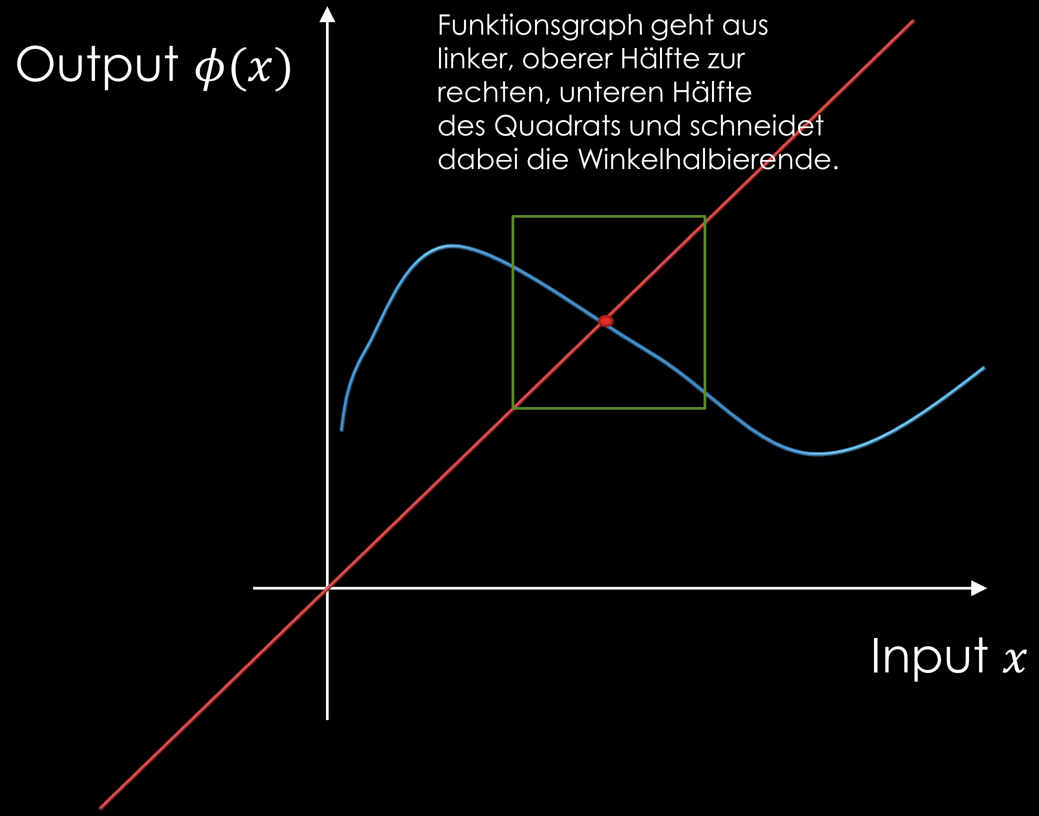
Ein Schnittpunkt $(\tilde{x}; \phi(\tilde{x}))$ des Graphen mit der Winkelhalbierenden der Achsen ist ein Fixpunkt von ϕ.

Für diesen Punkt (wie für alle Punkte der Winkelhalbierenden) gilt nämlich:

$$\phi(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

Die Frage lautet also: Unter welchen Bedingungen schneidet der Graph von ϕ die Winkelhalbierende?

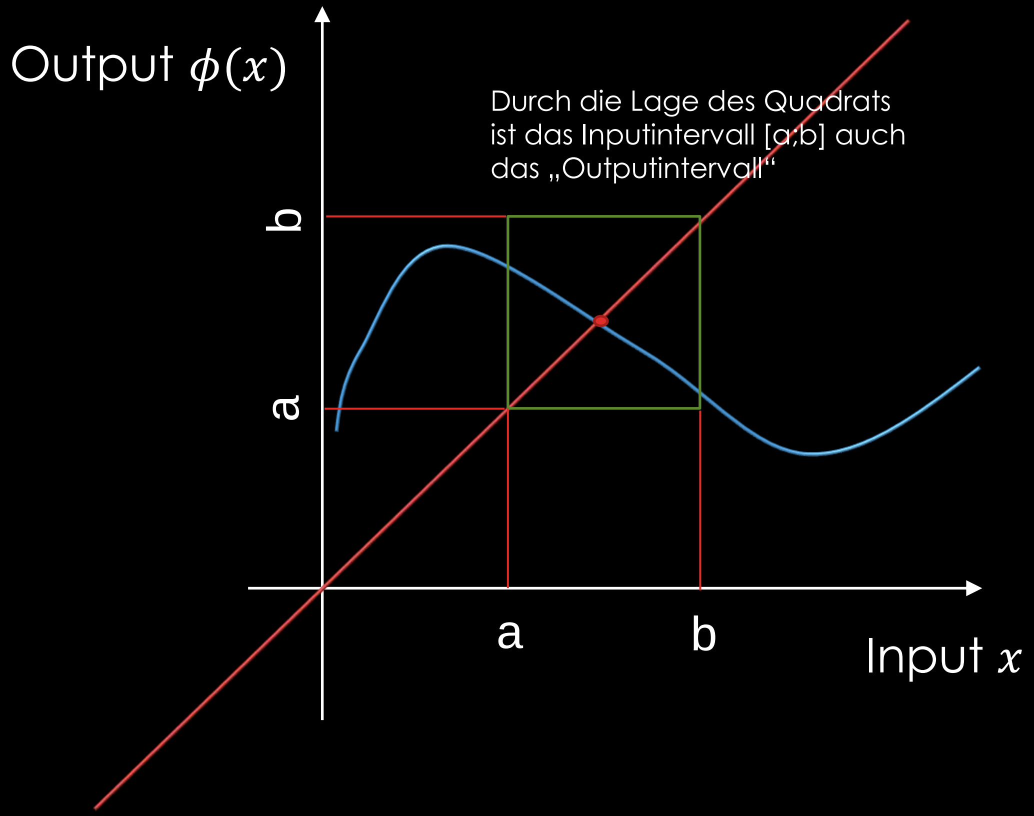
Hat ϕ einen Fixpunkt?



Wenn man passend an die Winkelhalbierende ein Quadrat zeichnen kann, so dass der Funktionsgraph nicht über dessen obere oder untere Kante hinausführt, also ganz innerhalb des Quadrates verläuft, dann muss der Graph innerhalb des Quadrates die Winkelhalbierende schneiden.

Weitere Voraussetzung: Die Funktion muss sich als durchgehender Strich zeichnen lassen. Sie muss *stetig* sein.

Hat ϕ einen Fixpunkt?

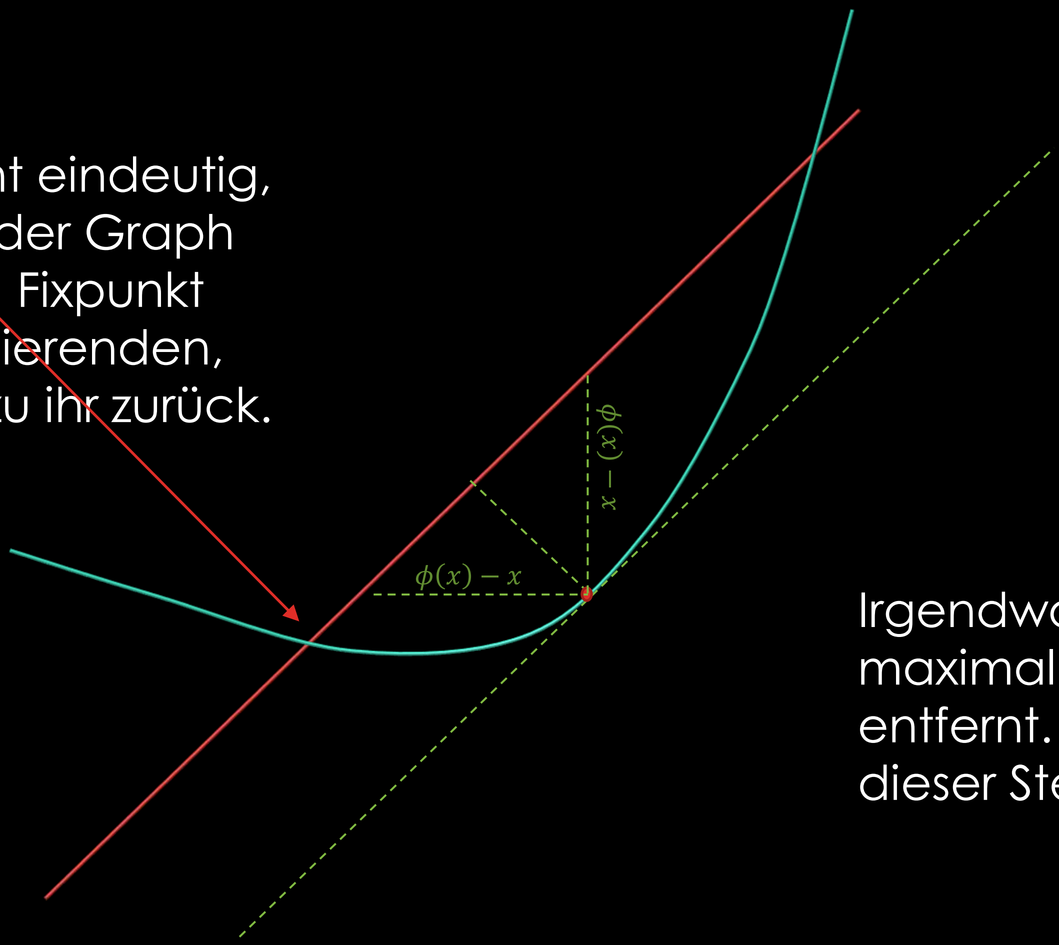


Mathematisch gesprochen:

Ist ϕ eine stetige reelle Funktion, die alle Punkte aus dem Intervall [a; b] wieder auf das Intervall [a; b] abbildet, dann besitzt sie einen Fixpunkt.

Ist der Fixpunkt eindeutig?

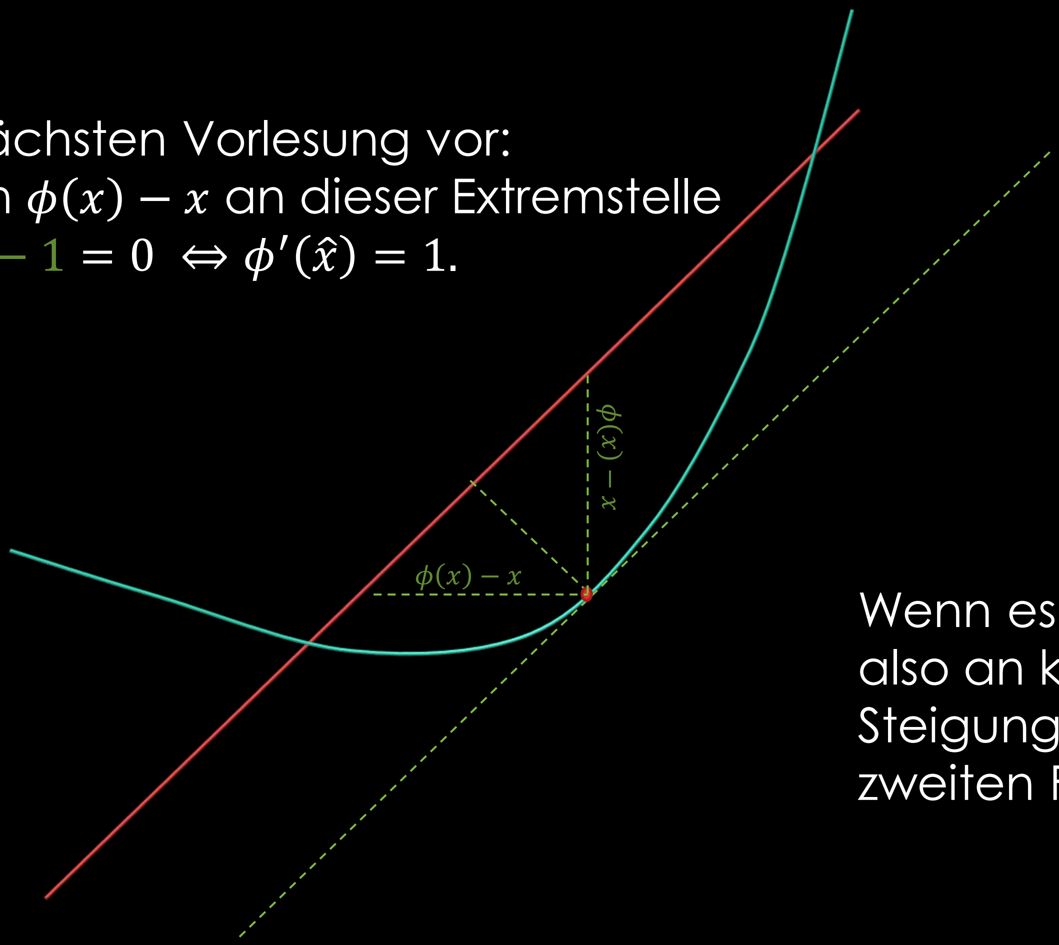
Ist der Fixpunkt nicht eindeutig, dann entfernt sich der Graph nach dem „ersten“ Fixpunkt von der Winkelhalbierenden, kehrt aber wieder zu ihr zurück.



Irgendwo dazwischen ist der Graph maximal von der Winkelhalbierenden entfernt. Die Funktion $\phi(x) - x$ besitzt an dieser Stelle ein Extremum.

Ist der Fixpunkt eindeutig?

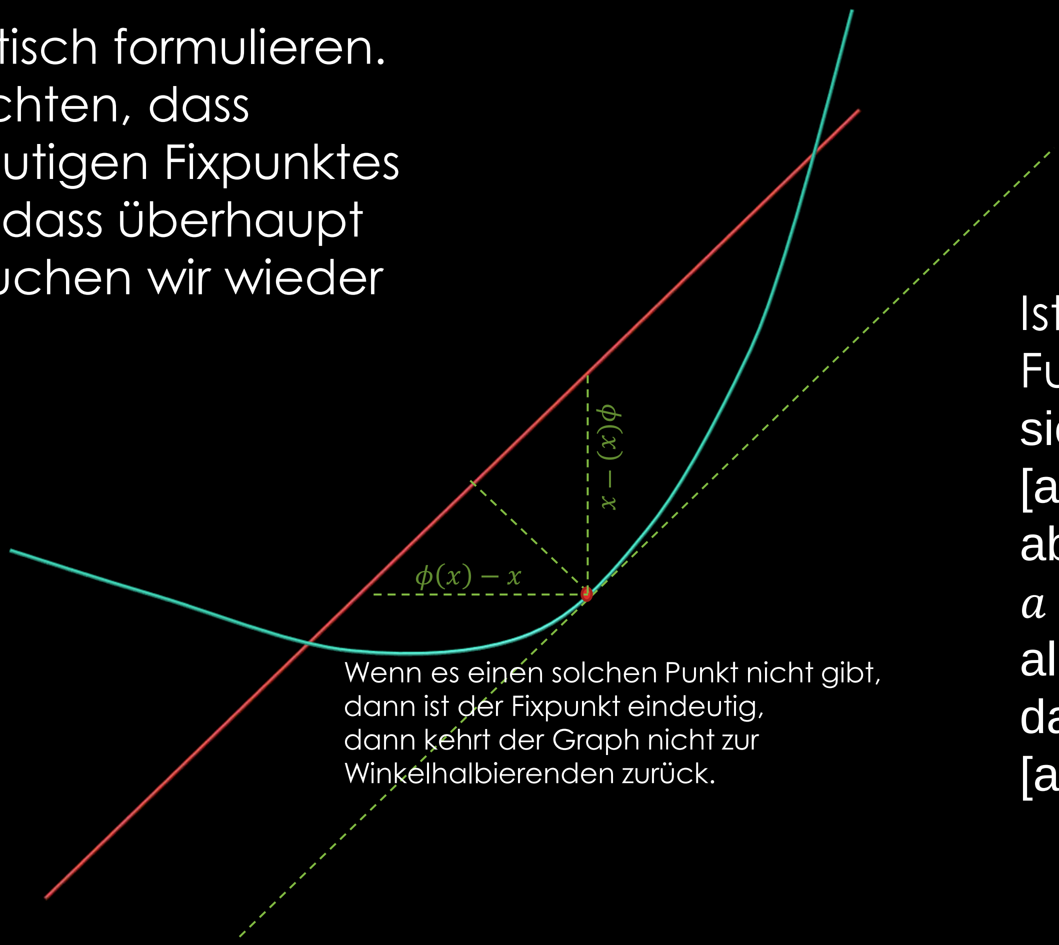
Greifen wir der nächsten Vorlesung vor:
Die Ableitung von $\phi(x) - x$ an dieser Extremstelle ist null. Also $\phi'(\hat{x}) - 1 = 0 \;\Leftrightarrow \phi'(\hat{x}) = 1$.



Wenn es also so eine Stelle nicht gibt, also an keiner Stelle die Funktion ϕ die Steigung 1 hat, dann kann es keinen zweiten Fixpunkt geben.

Ist der Fixpunkt eindeutig?

Jetzt wieder mathematisch formulieren. Dabei müssen wir beachten, dass zur Existenz eines eindeutigen Fixpunktes natürlich auch gehört, dass überhaupt einer existiert. Also brauchen wir wieder dieses [a;b]-Argument.



Ist die (stetig differenzierbare) Funktion ϕ so konstruiert, dass sie alle Punkte aus einem Intervall [a;b] wieder in dieses Intervall abbildet, so dass weiterhin $\phi\ (a) > a$ und $\phi\ (b) < b$ und weiterhin für alle a<x<b, $\phi'(x)$ nicht 1 ergibt, dann hat sie auf dem Intervall [a;b] einen eindeutigen Fixpunkt.

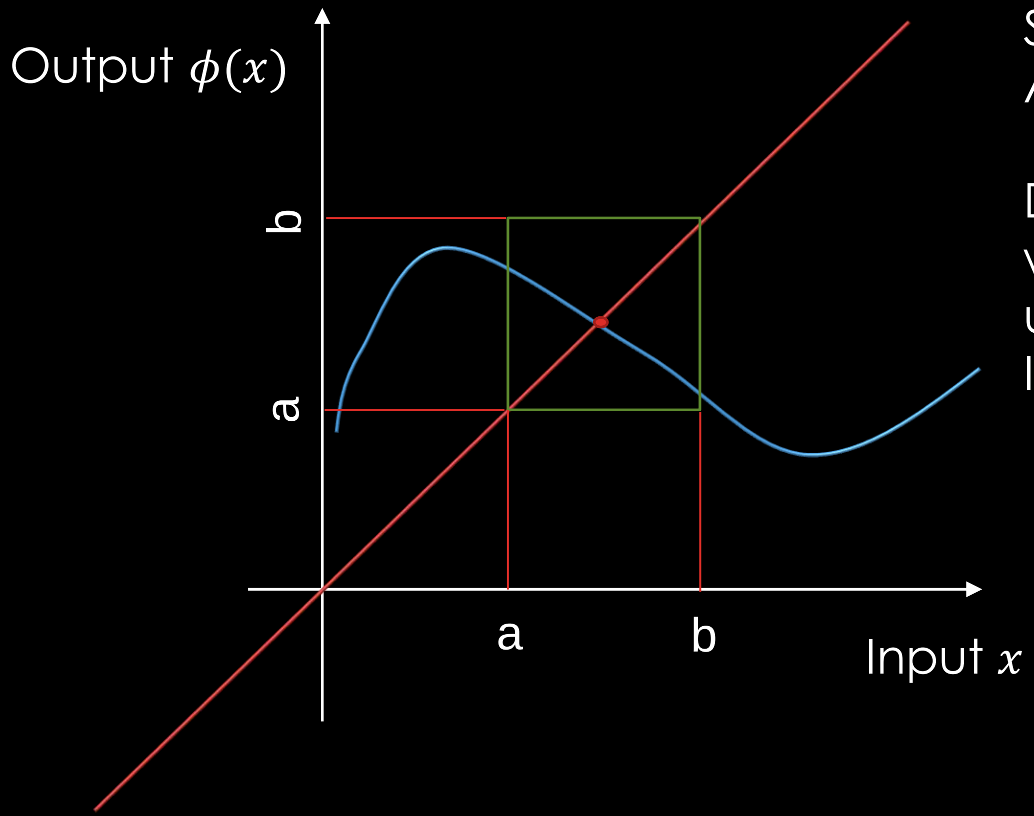
Funktioniert die Iteration?

Nehmen wir also an, dass wir auf einem Intervall [a;b] jetzt einen eindeutigen Fixpunkt haben, dann ist doch die wichtige Frage für unser Fixpunktverfahren, ob das rekursive Anwenden der Fixpunktfunktion

$$x_1 = \phi(x_0) \quad x_2 = \phi(x_1) \quad x_3 = \phi(x_2) \ldots$$

zu dem gewünschten Fixpunkt konvergiert.

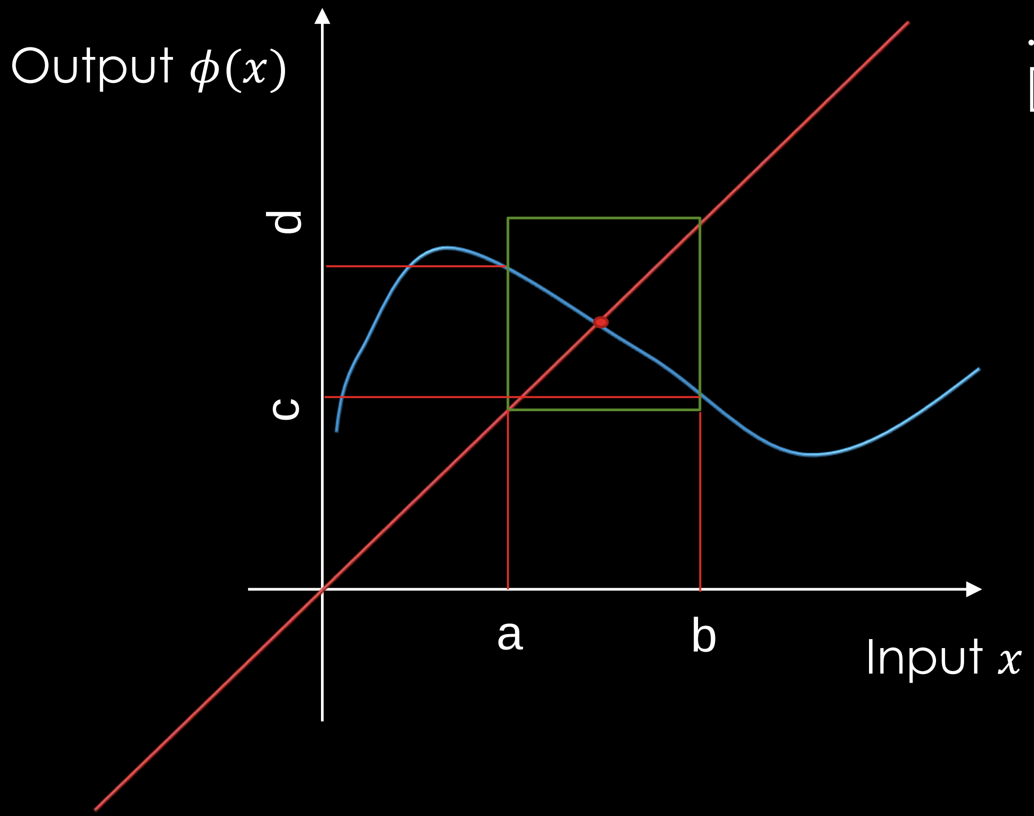
FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



Schauen wir uns nochmal das Argument mit dem Quadrat an.

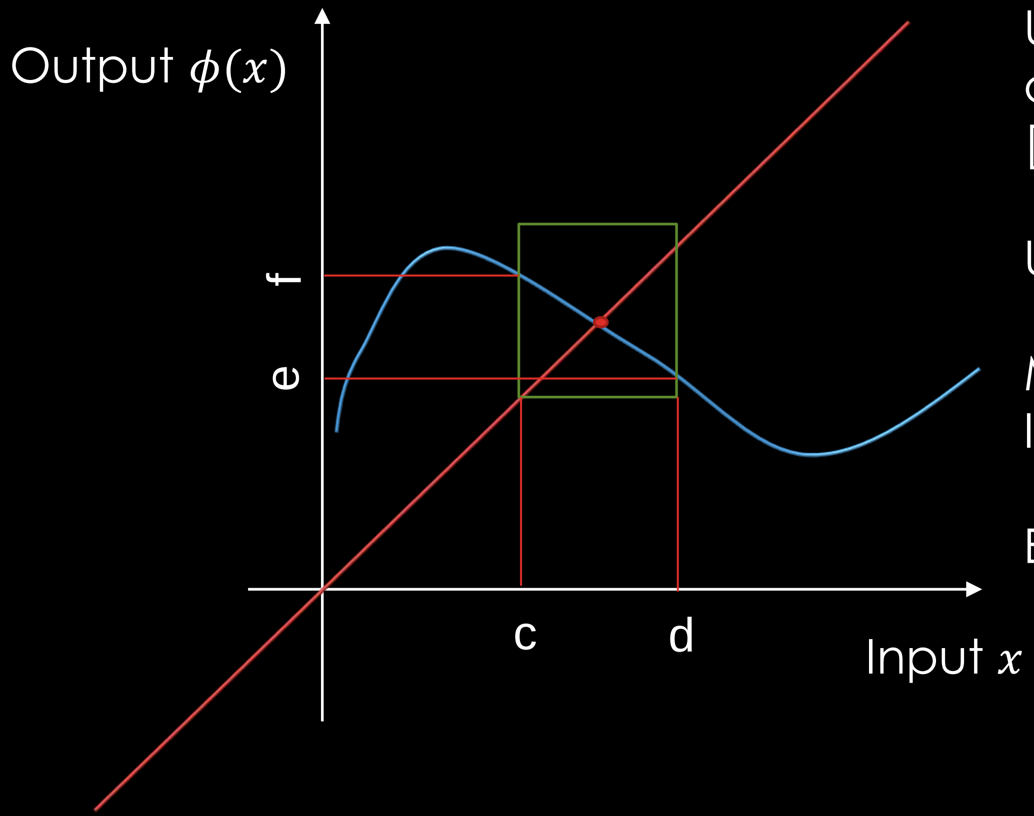
Das Interval [a;b] (Input)
wird ja mit ϕ nicht
unbedingt auf das *gesamte*
Intervall [a;b] (Output) abgebildet…

FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



… sondern nur auf einen Ausschnitt [c;d].

FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



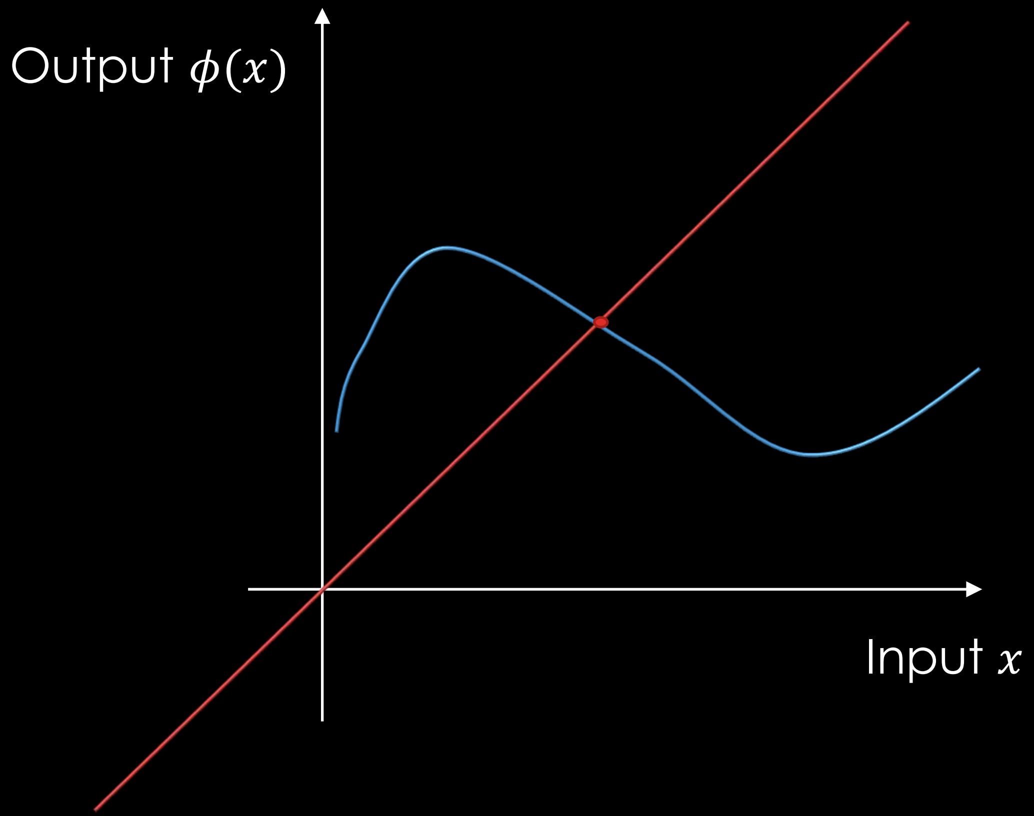
Und das Intervall [c;d] wiederum auf ein noch kleineres Intervall [e;f]…

Und so weiter…

Mit jedem Schritt der Iteration wird das Intervall kleiner und kleiner…

Es konvergiert gegen den Fixpunkt.

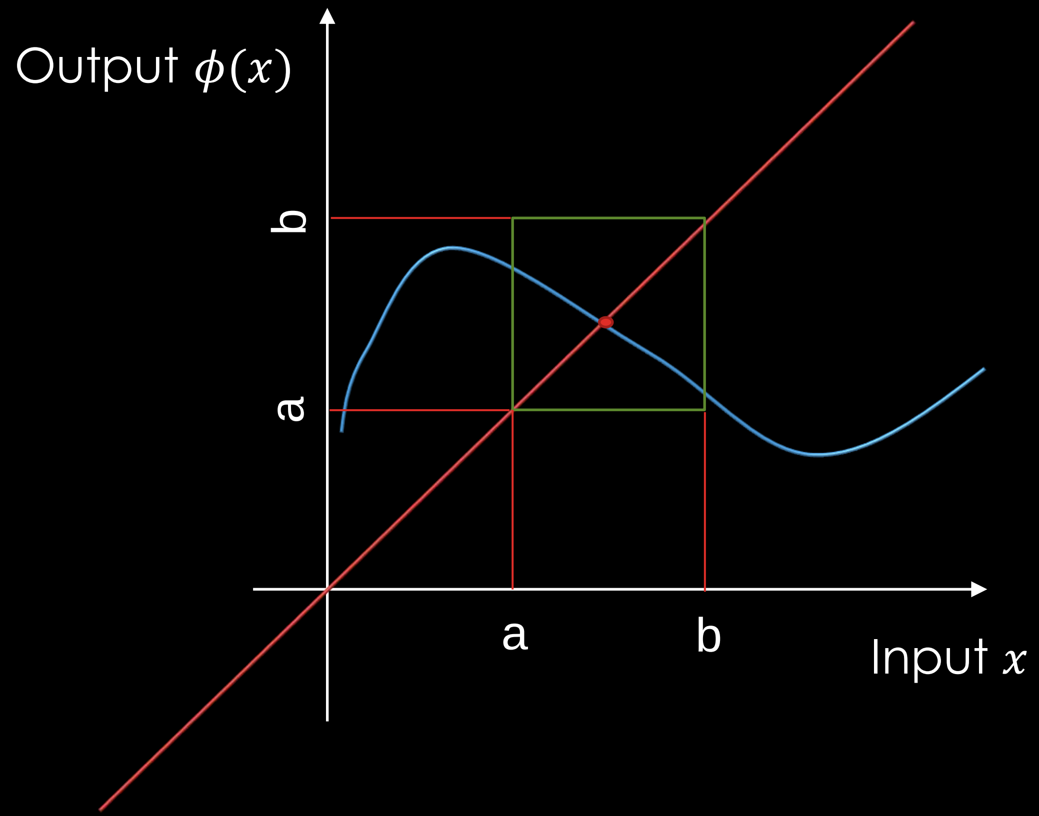
FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



Wie sollte also ϕ aussehen, damit diese Intervallverkleinerung (Kontraktion) stattfindet?

Tipp:
Wäre ϕ eine Gerade, wie müsste dann ihre Steigung aussehen??

FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



Die Antwort ist:

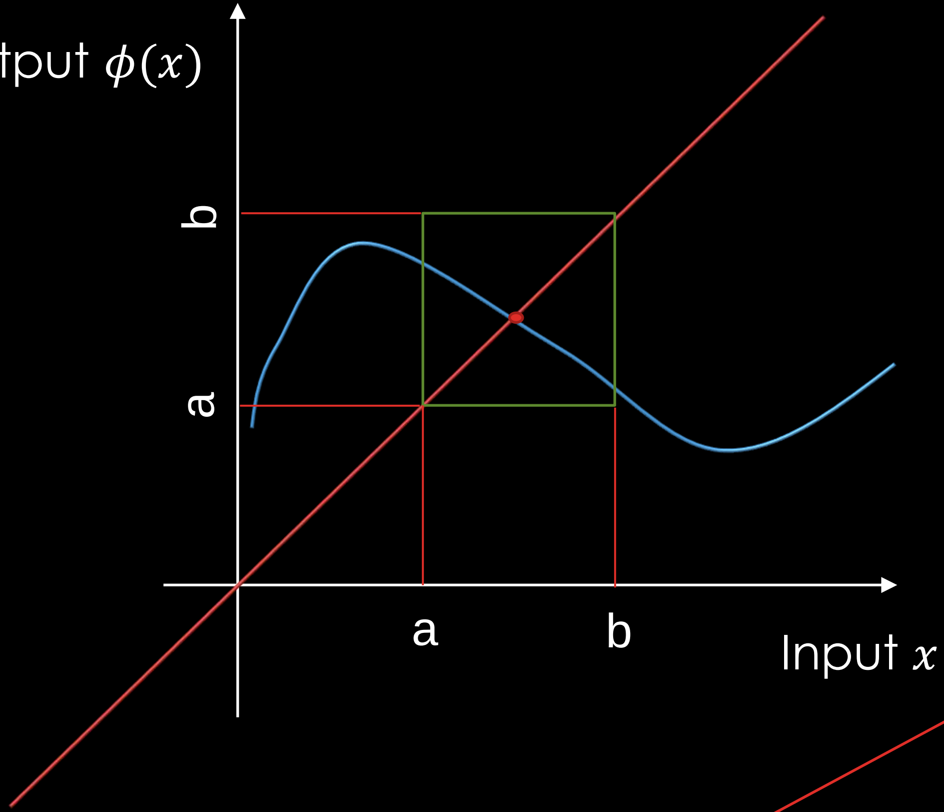
Wenn der Betrag der Steigung von ϕ in dem Intervall [a;b] (so wie in der Abbildung) an jeder Stelle echt kleiner als 1 ist, dann findet diese Intervall-Verkleinerung statt.

Genauer: Gibt es ein $L < 1$, so dass für die Steigung gilt $|\phi'(\mathrm{x})| \leq L$ für alle x aus [a;b], dann ist die Funktion eine Kontraktion mit

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

für alle x,y aus dem Intervall.

FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



Die Antwort ist:

Wenn der Betrag der Steigung von ϕ in dem Intervall [a;b] (so wie in der Abbildung) an jeder Stelle echt kleiner als 1 ist, dann findet diese Intervall-Verkleinerung statt.

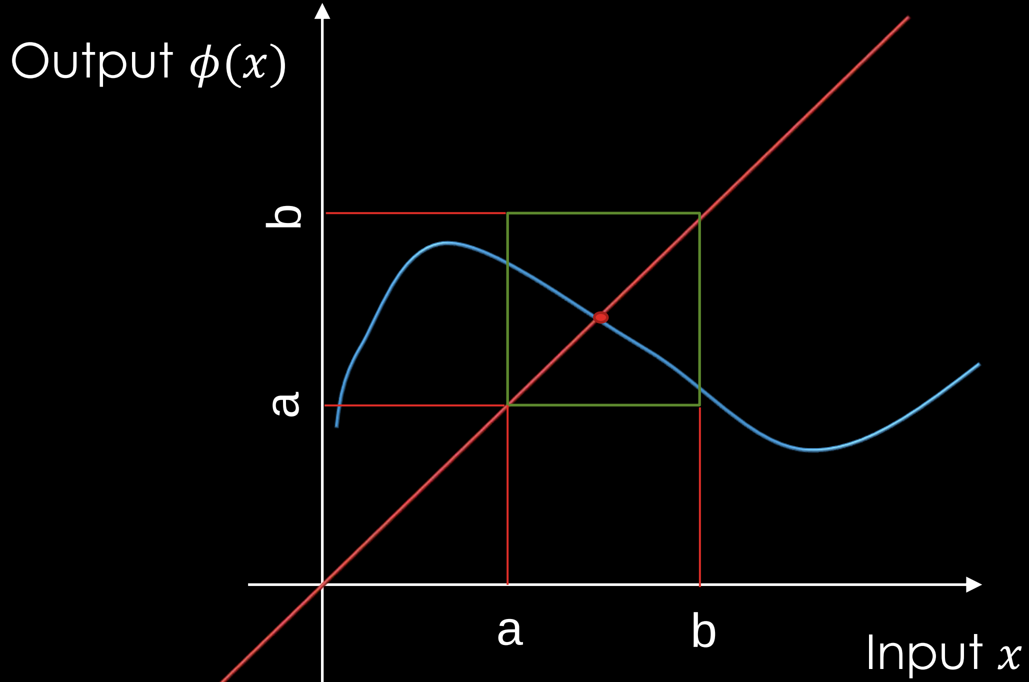
Genauer: Gibt es ein $L < 1$, so dass für die Steigung gilt $|\phi'(\mathrm{x})| \leq L$ für alle x aus [a;b], dann ist die Funktion eine Kontraktion mit

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

für alle x,y aus dem Intervall.

Hierfür braucht man den Begriff „Steigung"…

FUNKTIONIERT DIE ITERATION?



Hierfür braucht man den Begriff „Steigung“ nicht! Diese Bedingung kann man auch mit komplexen Zahlen und Beträgen verstehen.

Die Antwort ist:

Wenn der Betrag der Steigung von ϕ in dem Intervall [a;b] (so wie in der Abbildung) an jeder Stelle echt kleiner als 1 ist, dann findet diese Intervall-Verkleinerung statt.

Genauer: Gibt es ein $L < 1$, so dass für die Steigung gilt $|\phi'(\mathrm{x})| \leq L$ für alle x aus [a;b], dann ist die Funktion eine Kontraktion mit

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

für alle x,y aus dem Intervall.

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)|$.

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

WENN

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\ |x - y|,$$

Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass ϕ stetig ist. Man muss es also nicht extra aufführen.

DANN

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)|$.

Das ist der Maximalwert des Betrags der Ableitung auf dem Intervall [a;b].

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)|$.

In diesem Satz finden wir alles wieder,
Was wir zuvor diskutiert haben.

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)|$.

Diese Voraussetzung garantiert, dass es einen Fixpunkt gibt ([a;b]-Argument).

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x\epsilon[a;b]} |\phi'(x)|$.

Die Steigung ist betraglich echt kleiner als 1. Daher ist der Fixpunkt eindeutig… es gilt nie $\phi'(x)$=1

FIXPUNKTSATZ VON BANACH

Bildet die Iterationsfunktion ϕ das Intervall [a;b] wieder auf [a;b] ab und gilt für eine Zahl $L < 1$ die Kontraktionseigenschaft, dass für alle x, y im Intervall [a;b]:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L\,|x - y|,$$

dann konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert x_0 aus dem Intervall gegen den (auf dem Intervall) eindeutigen Fixpunkt von ϕ. Als Kontraktionszahl kann man wählen: $L = \max_{x\epsilon[a;b]} |\phi'(x)|$.

Und schließlich werden die Intervalle immer kleiner. Das Verfahren konvergiert.

WIE SCHNELL KONVERGIERT DIE FIXPUNKTITERATION?

$L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)| < 1$

Kennt man die Kontraktionszahl L einer Funktion auf dem Intervall [a;b], dann kann man ausrechnen, wie viele Schritte man machen muss, bis eine gegebene Genauigkeit für die gesuchte Lösung erreicht ist.

A-priori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_0 - x_1|$$

A-posteriori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

WIE SCHNELL KONVERGIERT DIE FIXPUNKTITERATION?

$L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)| < 1$

Hier steht, wie genau die Iterierte x_n den Fixpunkt $\tilde{x}$ annähert. Wie weit ist die Iteration im n-ten Schritt noch von der „wahren Lösung" entfernt?

A-priori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_0 - x_1|$$

A-posteriori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L}{1 - L} |x_n - x_{n-1}|$$

WIE SCHNELL KONVERGIERT DIE FIXPUNKTITERATION?

Diese Genauigkeit ist besser (also kleiner) als…

$L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)| < 1$

A-priori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_0 - x_1|$$

A-posteriori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

WIE SCHNELL KONVERGIERT DIE FIXPUNKTITERATION?

$L = \max_{x \epsilon [a;b]} |\phi'(x)| < 1$

A-priori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_0 - x_1|$$

A-posteriori Fehlerschätzung:

$$|x_n - \tilde{x}| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

… das hier. Hier steht jeweils ein Ausdruck, der von L abhängt. Je kleiner L ist, desto kleiner ist auch der Fehler im n-ten Schritt.

Multipliziert wird dieser Ausdruck mit der Abweichung von zwei aufeinanderfolgenden Iterierten. Wenn man also schaut, wie weit zwei aufeinanderfolgende Iterierte voneinander entfernt sind, kann man ausrechnen, wie weit die n-te Iterierte von der wahren Lösung abweicht.

Hier ein Beispiel für eine Anwendung dieser Abschätzung in der Mathematik: YouTube-Link

Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, wie es sich mit dem Babylonischen Wurzelziehen verhält…