MATHEMATIK I

Differentialrechnung in einer Veränderlichen

Aufgabe: Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $e^x = 4\sin(x)$!

Schwierig? … Ein „schlauer“ Taschenrechner ist jetzt erlaubt.

MOTIVATION

MOTIVATION

Aufgabe: Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $e^x = 4\sin(x)$!

Mit meinem „Taschenrechner“ (octave-online.net) konnte ich in wenigen Schritten eine mögliche Lösung finden:

$x = 1{,}364958433733097\ldots$

```
octave:2> 1
ans =  1
octave:3> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  2.1625
octave:4> format long
octave:5> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.67066116421661З
octave:6> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.436937133064616
octave:7> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.370640280584971
octave:8> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364998749920756
octave:9> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958435787250
octave:10> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958433733097
octave:11> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958433733097
```

Was habe ich hier nur getan?

Aufgabe: Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $e^x = 4\sin(x)$!

Mit meinem „Taschenrechner“ (octave-online.net) konnte ich in wenigen Schritten eine mögliche Lösung finden:

$x = 1{,}364958433733097\ldots$

$$\phi(x) = x - \frac{e^x - 4\sin(x)}{e^x - 4\cos(x)}$$

Eine Fixpunktiteration! Aber wie komme ich zu diesem ϕ?

```
octave:2> 1
ans =  1
octave:3> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  2.1625
octave:4> format long
octave:5> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.670661164216613
octave:6> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.436937133064616
octave:7> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.370640280584971
octave:8> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364998749920756
octave:9> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958435787250
octave:10> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958433733097
octave:11> ans-((exp(ans)-4*sin(ans))/(exp(ans)-4*cos(ans)))
ans =  1.364958433733097
```

MOTIVATION

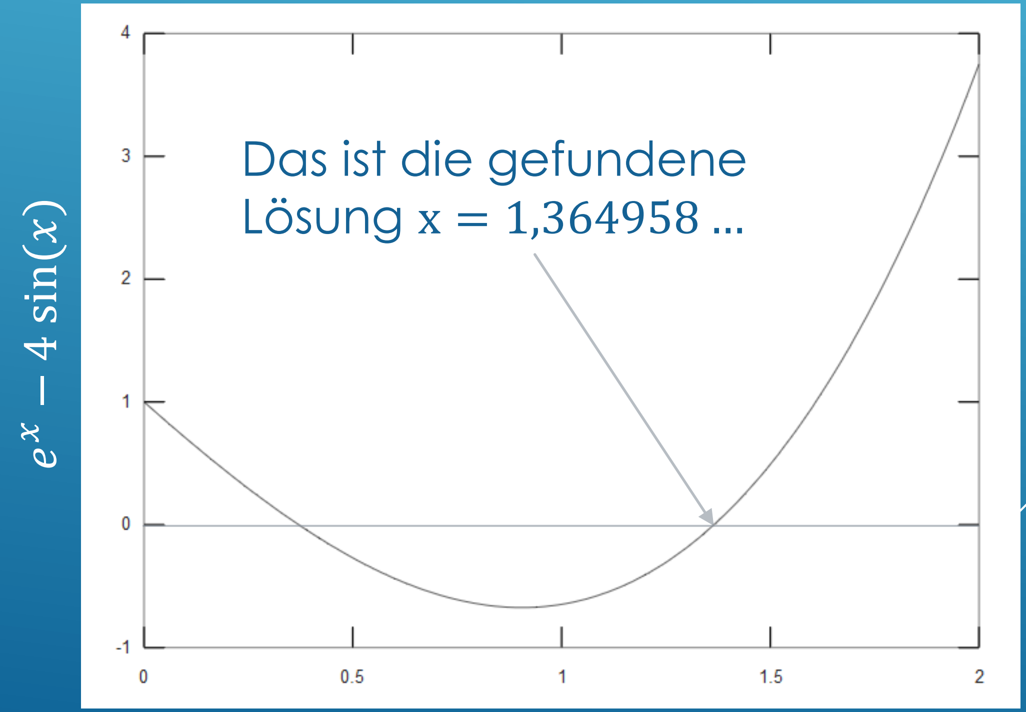
Es wird in dieser Vorlesung um das Lösen von Gleichungen gehen, in denen nur eine einzelne „Unbekannte“ x auftaucht.

Äquivalent: Es geht um das Finden von Nullstellen von Funktionen f(x).

In unserem einleitenden Beispiel suchten wir die Nullstellen von der Funktion:

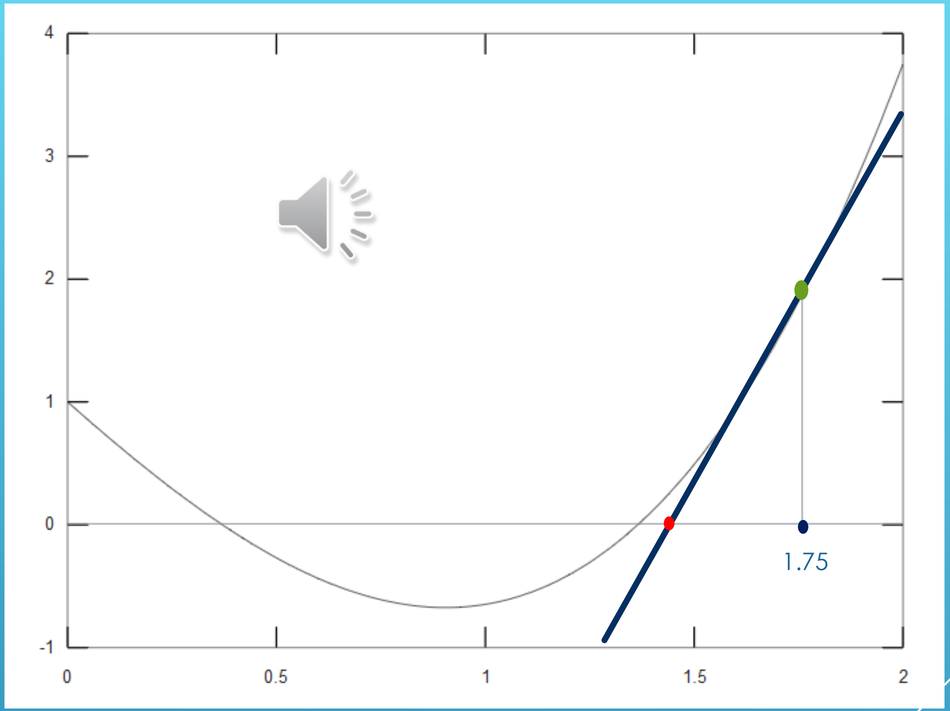
$$f(x) = e^x - 4\sin(x)$$

MOTIVATION



- Die Fixpunktiteration, die wir kennenlernen werden, heißt Newton-Verfahren.
  (Sir Isaac Newton lebte 1642-1726)

- Newton-Verfahren (YouTube)
- Newton-Verfahren (GeoGebra)



NEWTON-VERFAHREN

Für zwei verschiedene reelle Zahlen x_0, x_1 und eine Funktion f gilt:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Einfach mal nachrechnen… Den Term $(x_1 - x_0)$ kann man „wegkürzen“. Dann steht auf der einen Seite $f(x_1)$ und auf der anderen Seite $f(x_0) + f(x_1) - f(x_0)$ … also auch $f(x_1)$.

WAS IST F‘ ?

Für zwei verschiedene reelle Zahlen x_0, x_1 und eine Funktion f gilt:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

So sieht diese Gleichung aus, wenn man für die Differenz an bestimmten Stellen das Symbol $\Delta x = x_1 - x_0$ schreibt.

WAS IST F' ?

Für zwei verschiedene reelle Zahlen x_0, x_1 und eine Funktion f gilt:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1) \\
&= f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \\
&= f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= f(x_0) + (x_1 - x_0) \ \cdot f'(x_0;\ \Delta x)
\end{aligned}
$$

Den hinteren Bruch in diesem Ausdruck nennt man einfach f‘ (Differenzenquotient):

$$f'(x_0;\ \Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

WAS IST F‘ ?

Das sind alles äquivalente Term-Umformungen. An keiner Stelle ist von „Steigung“ oder „Tangente“ die Rede. Die Gleichung ist auch keine Näherung, sondern (noch) exakt:

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f'(x_0;\, \Delta x),$$

wobei

$$f'(x_0;\, \Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

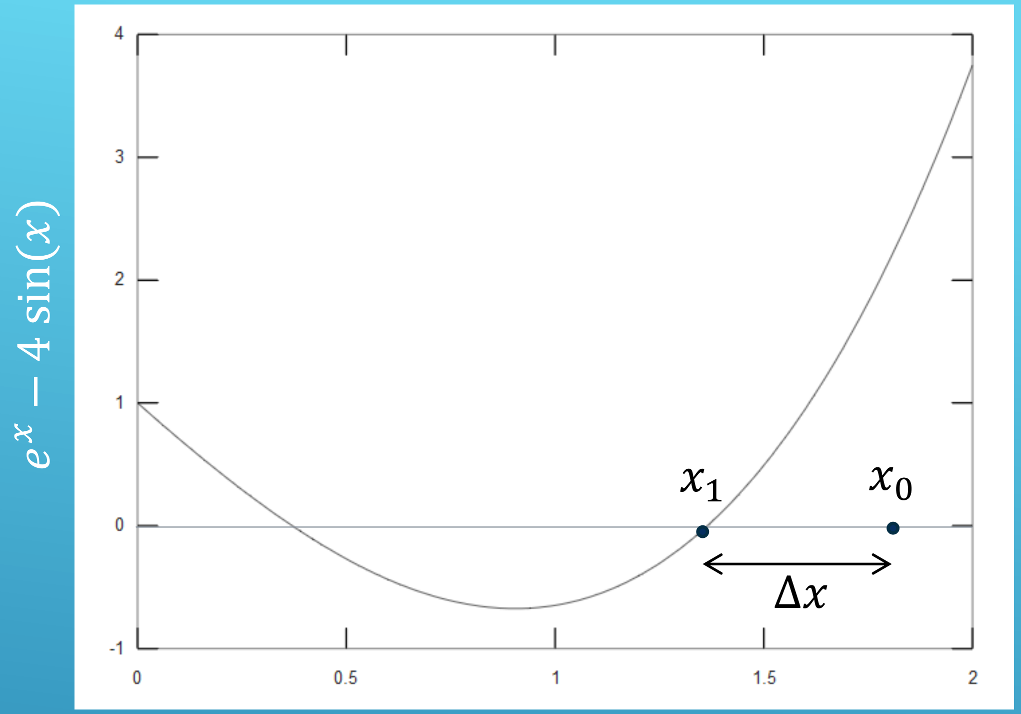
ÄQUIVALENTE FORMULIERUNG

Wir suchen also eine Nullstelle der Funktion f(x). Also ein x_1 mit $f(x_1) = 0$. Also gemäß der vorangehenden Formeln:

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0) \cdot f'(x_0;\, \Delta x)$$

Also nach x_1 aufgelöst:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0;\, \Delta x)}$$



NEWTONS IDEE

Newton hat diese Idee verwendet, um Nullstellen von Polynomen zu finden. Für solche Polynome, für die es z.B. keine Lösungsformel (kein Ausdruck mit Wurzeln, der von den Koeffizienten des Polynoms abhängt) gab/gibt. Éveriste Galois hat ca. 150 Jahre nach Newtons Idee gezeigt, dass es für allgemeine Polynome ab Grad 5 solche Formeln nicht mehr gibt. (Übrigens im Alter von ca. 20 Jahren, denn älter als 20 ist Galois nicht geworden.)

Wir wollen hier aber mal mit Hilfe von Newtons Idee die Nullstelle von X^2-3 ermitteln, für die es ja eine solche Formel noch gäbe: Lösung ist die Wurzel aus 3 … (Sie kennen bereits das Problem: Newton hatte keinen Taschenrechner)

NULLSTELLEN VON POLYNOMEN

Es ist also $f(x) = x^2 - 3$

Damit kann man auch $f'(x;\ \Delta x)$ ausrechnen (RECHNEN SIE SELBER NACH!):

$$f'(x;\ \Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left((x+\Delta x)^2 - 3\right) - (x^2 - 3)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 - 3 - x^2 + 3}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Δx soll klein sein. Jetzt kommt Leibniz ins Spiel.

Gottfried Wilhelm Leibniz war ein Zeitgenosse von Newton und ein „Universalgelehrter“ (Philosoph, Mathematiker, Jurist, Historiker). Unter den Eindrücken des beendeten 30jährigen Krieges (1618-1648) begann die Zeit der frühen Aufklärung (und Leibniz glaubte auch, dass mit Hilfe von Vernunft/Mathematik Frieden zwischen den Menschen zu schaffen sei). Wie Sie vielleicht schon daran gesehen haben, dass Napoleon Bonaparte schwere geometrische Sätze kannte und, dass ein junger Mann im Alter von 20 Jahren abgefahrene Theorien entwickelte, die bis heute wirken, war Mathematik in Zeiten der Aufklärung und auch nach der Französischen Revolution (bis ungefähr zum Beginn der Industrialisierung in Frankreich ca. 1860) „staatstragend“. Die meisten gelehrten und verwendeten Theorien stammen aus dieser Zeit.

HISTORISCHES

Zurück zu $f(x) = x^2 - 3$

$$f'(x; dx) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{\left((x+dx)^2 - 3\right) - (x^2 - 3)}{dx} = \frac{x^2 + 2x\,dx + dx^2 - 3 - x^2 + 3}{dx} = \frac{2x\,dx + dx^2}{dx} = 2x + dx$$

Leibniz und Newton nehmen nun an, dass Δx sehr, sehr, sehr klein ist. Leibniz drückt das durch das Symbol dx aus (also ein „kleines d“ anstelle eines „großen Delta“, ein Differential anstelle einer Differenz). Nun soll dx beliebig nahe an Null sein. Philosophie: dx ist also eine Zahl, die nicht Null ist, aber näher an Null als jede (von Null verschiedene) reelle Zahl. Damit lässt sich 2x+dx nicht mehr von 2x unterscheiden. Die Differenz ist einfach „zu klein“. Und schließlich steht hier:

$$f(x) = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$$

Newton sah in dieser Überlegung den Übergang zur „Momentangeschwindigkeit“, während Leibniz hierin die Lösung des Tangentenproblems (ganz im Sinne der graphischen Darstellung des Newton-Verfahrens) sah. Die Funktion f(x) hat im Punkt x die Steigung f‘(x). Dieses YouTube-Video zeigt diese Philosophie.

PHILOSOPHIE VON LEIBNIZ

Setzen wir dieses Resultat also in Newtons Formel ein (es ergibt sich eine Näherungsformel):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0;\,\Delta x)} \overset{\text{Näherung}}{\approx} x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0\,)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x_0} + x_0\right)$$

Na… Kommt Ihnen diese Formel nicht bekannt vor??

Tatsächlich steht hier das Babylonische Wurzelziehen. Das Newton-Verfahren angewendet auf die Funktion $f(x) = x^k - z$ ergibt tatsächlich die Iterationsvorschrift für das Babylonische Wurzelziehen von $\sqrt[k]{z}$.

BEISPIEL: NEWTON-VERFAHREN

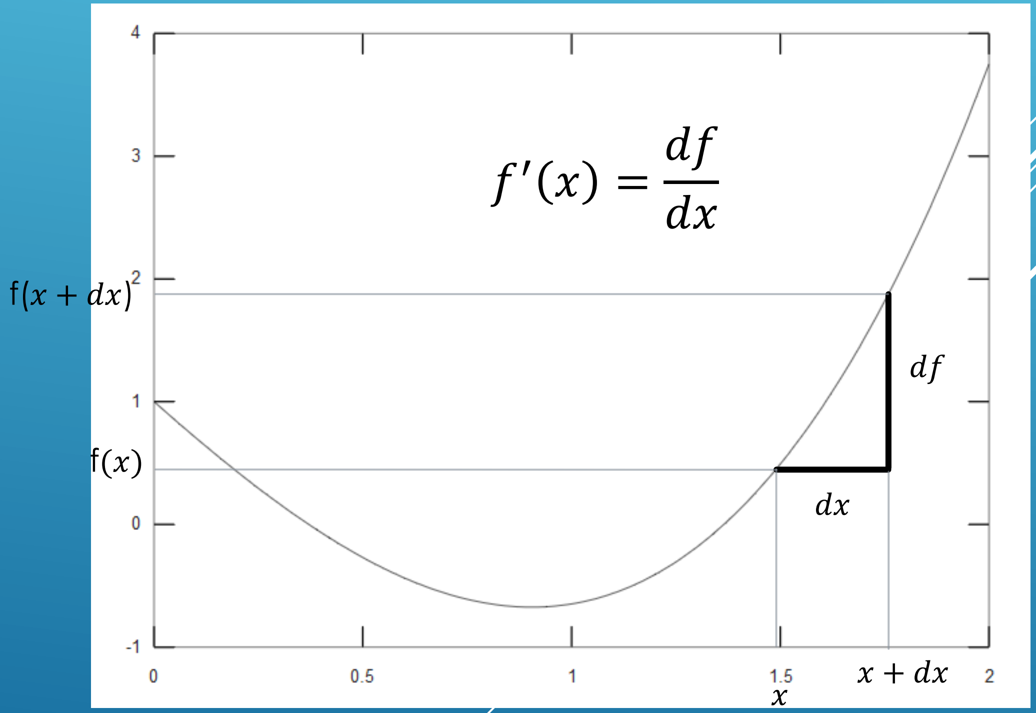
Die *Ableitung einer Funktion* (Differentialquotient) ist also laut Leibniz gegeben als

$$f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{df}{dx},$$

wobei man sich dx als „fast“ Null vorstellen muss… also eigentlich gar nicht mehr „zeichenbar“.

Die Ableitung gibt an, wie stark sich f(x) verändert (df), wenn man x verändert (dx).

ABLEITUNG EINER FUNKTION



Mit Hilfe von Leibniz und Newtons Ideen lassen sich viele Ableitungen von Funktionen ausrechnen. Zum Beispiel die Ableitung von $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx}$$

$$= 3x^2 + 3x\,dx + dx^2 = 3x^2$$

Allgemein $f(x) = x^k \;\Rightarrow f'(x) = k\,x^{k-1}$, wobei das k eine reelle Zahl sein darf.

Daraus ergeben sich eine Reihe von Ableitungsregeln für z.B. Stamm-Brüche (k ist negativ) oder Wurzeln (k ist rational). Sehen Sie sich z.B. den Abschnitt „Potenzfunktionen" in dieser Ableitungstabelle an.

ABLEITUNG EINER FUNKTION

Auch andere Ableitungsregeln ergeben sich aus diesem Ansatz. Diese und die folgenden sind zu merken:

Die Ableitung von $c \cdot f(x)$ ist $c \cdot f'(x)$. (Konstanter Faktor-Regel)

Die Ableitung von $f(x) + g(x)$ ist $f'(x) + g'(x)$. (Summenregel)

Die Ableitung von $f(x) \cdot g(x)$ ist $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ (Produktregel)

ABLEITUNGSREGELN

Diese Regeln kann man verwenden, um z.B. die Ableitung von $f(x)=3x^3-5x^2+1$ auszurechnen:

$$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 0 = 9x^2 - 10x$$

ABLEITUNGSREGELN

Schwierig wird es jetzt bei der Funktion $f(x) = \sqrt{x^3+2}$. Wir kennen die Ableitung von x^3+2 und auch die Ableitung der Wurzelfunktion jeweils als Potenzfunktionen. Diese Funktion $\sqrt{x^3+2}$ ist jedoch das Hintereinanderausführen dieser beiden Operationen. Zunächst rechnet man $h(x) = x^3 + 2$ aus und dann wendet man auf h(x) die Funktion g an… das Ziehen einer Wurzel. Insgesamt: $f(x) = g\big(h(x)\big)$. Wie leitet man so eine verkettete Funktion ab? (Kettenregel)

$$\frac{df}{dx} = \frac{g\big(h(x+dx)\big) - g(h(x))}{dx} = \frac{g(h(x)+dh) - g(h(x))}{dh}\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dx},$$

denn $dh = h(x+dx) - h(x)$.

ABLEITUNGSREGELN

Das kann man anwenden, um z.B folgende Ableitung zu rechnen: $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x^3 + 2}$,

die sich darstellen lässt als $f(x) = g(h(x))$, wobei $\mathrm{h}(x) = x^3 + 2$ und $g(h) = \sqrt{h} = h^{\frac{1}{2}}$:

$$f'(x) = \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2}} \cdot 3x^2,$$

wobei $h^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

ABLEITUNGSREGELN

Die Ableitung von einem Bruch $\frac{f(x)}{g(x)}$ kann man über die Produktregel und die Kettenregel ausrechnen:

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = ((g(x))^{-1} \cdot f(x))' = -g'(x) \cdot (g(x))^{-2} \cdot f(x) + (g(x))^{-1} \cdot f'(x)$$

Daher ergibt die Ableitung eines Bruches $\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$ (Quotientenregel)

ABLEITUNGSREGELN

Mit der Quotientenregel gehen auch Ausdrücke, wie z.B. $f(x) = \frac{x^2+5}{x-1}$:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - 1 \cdot (x^2+5)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 5}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 2x - 5}{x^2 - 2x + 1}$$

ABLEITUNGSREGELN

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}$$

2.

$$= \frac{x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx}$$

$$= 3x^2 + 3x\,dx + dx^2 = 3x^2$$

1.

VON LEIBNIZ ZU CAUCHY

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{dx\to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx\to 0} \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}$$

$$= \lim_{dx\to 0} \frac{x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx}$$

$$= \lim_{dx\to 0} 3x^2 + 3x\,dx + dx^2 = 3x^2$$

Expertenwissen:
Wie kann man den Limes verstehen?

VON LEIBNIZ ZU CAUCHY

Cauchy kann mit seinem Ansatz z.B. auch die Ableitung von $f(x) = e^x$ ausrechnen:

$$f'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{e^x e^{dx} - e^x}{dx} = e^x \lim_{dx \to 0} \frac{e^{dx} - 1}{dx} = e^x$$

Dass der hintere Grenzwert tatsächlich 1 ist, kann er durch eine Abschätzung zeigen:

Die Funktion e^{dx} lässt sich für dx<1 (und dx soll ja klein sein) nach oben und unten abschätzen durch

$\frac{1}{1-dx} \geq e^{dx} \geq 1 + dx$ und daher (1 abziehen und durch dx teilen)

$\frac{\frac{1}{1-dx}-1}{dx} \geq \frac{e^{dx}-1}{dx} \geq 1$ also $\frac{1}{1-dx} \geq \frac{e^{dx}-1}{dx} \geq 1.$

Da der mittlere Ausdruck von zwei Folgen „eingeklammert wird“, die beide gegen 1 konvergieren, muss auch der mittlere Ausdruck gegen 1 streben. (siehe hier)

ABLEITUNGSREGELN

VON LEIBNIZ ZU ROBINSON

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2dx + 3x\,dx^2 + dx^3 - x^3}{dx}$$

$$= 3x^2 + 3x\,dx + dx^2 \xrightarrow{\text{Standardteil}} 3x^2$$

Philosophie: dx ist also eine Zahl, die nicht Null ist, aber näher an Null als jede (von Null verschiedene) reelle Zahl.

Didaktisches Material

- Mit Hilfe dieser hyperreellen Zahlen lassen sich nun auch die Ableitungen von Sinus und Kosinus ermitteln:

$$f(x) = \sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

Gezeigt in diesem YouTube-Video und in Abbildung 7 in dem verlinkten Artikel

ABLEITUNG DES SINUS

Zurück zu der einleitenden Fragestellung: Die Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 4\sin(x)$ ist gesucht. Das Newton-Verfahren kann jetzt ausgerechnet werden. Es ist hier eine Fixpunktiteration mit der Iterationsfunktion

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{e^x - 4\sin(x)}{e^x - 4\cos(x)}$$

Was sind nun die Eigenschaften dieser Funktion hinsichtlich des Fixpunktsatz von Banach? Wir haben auf der zweiten Folie am Anfang gesehen, dass die Newton-Iteration bereits nach sieben Durchläufen ein Ergebnis liefert, das auf 15 Nachkommastellen genau war. Wie lässt sich diese schnelle Konvergenz verstehen? Was ist die Kontraktionszahl L dieser Iterationsfunktion?

ANWEDNUNGSBEISPIEL

Wir wollen die Kontraktionszahl für das allgemeine Newton-Verfahren „ausrechnen". Dazu müssen wir die Ableitung von der Iterationsfunktion bilden (nach der Summen- und Quotientenregel):

$$\phi'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = 1 - 1 + \frac{f \cdot f''}{(f')^2} = \frac{f \cdot f''}{(f')^2}$$

f'' ist die Ableitung von f' … die sogenannte „zweite Ableitung" von f.

Gesucht ist ein Fixpunkt von ϕ. Jeder Fixpunkt von ϕ ist aber eine Nullstelle von f. Und damit ist jeder Fixpunkt von ϕ auch (wegen der obigen Rechnung) eine Nullstelle von ϕ'. D.h. in der Nähe der gesuchten Lösung ist die Steigung von ϕ nahe bei Null. Und daher auch die Kontraktionszahl nahe bei Null… und daher konvergiert das Newton-Verfahren (und das Babylonische Wurzelziehen) so wahnsinnig schnell. Schauen Sie sich die Folien der letzten Vorlesung noch einmal an, um zu verstehen dass eine geringe Steigung von ϕ eine schnelle Konvergenz bedeutet.

ABLEITUNG DER ITERATIONSFUNKTION