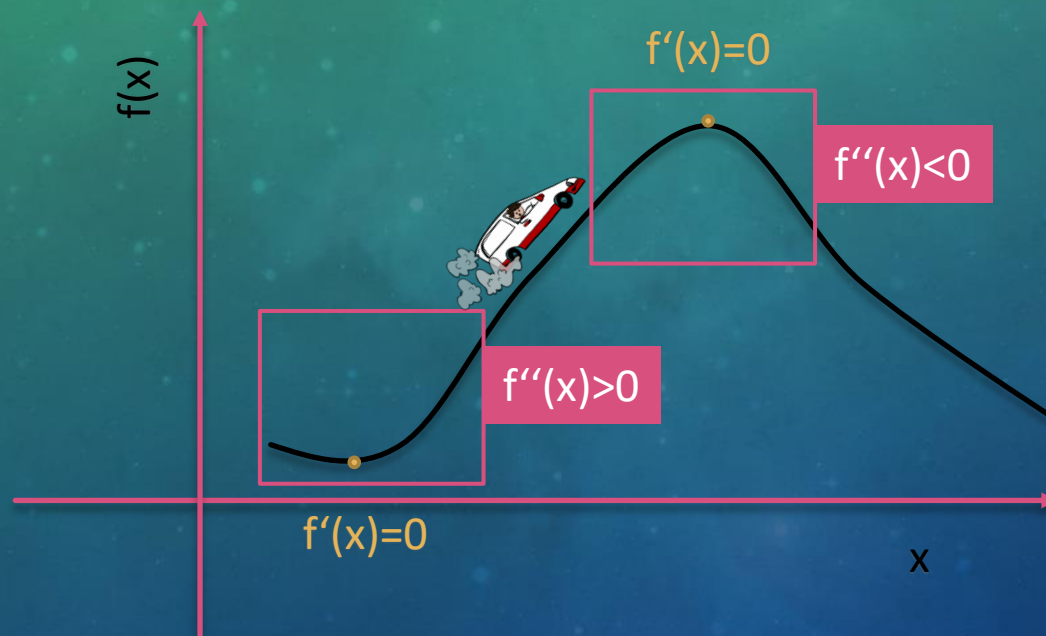




MATHEMATIK I

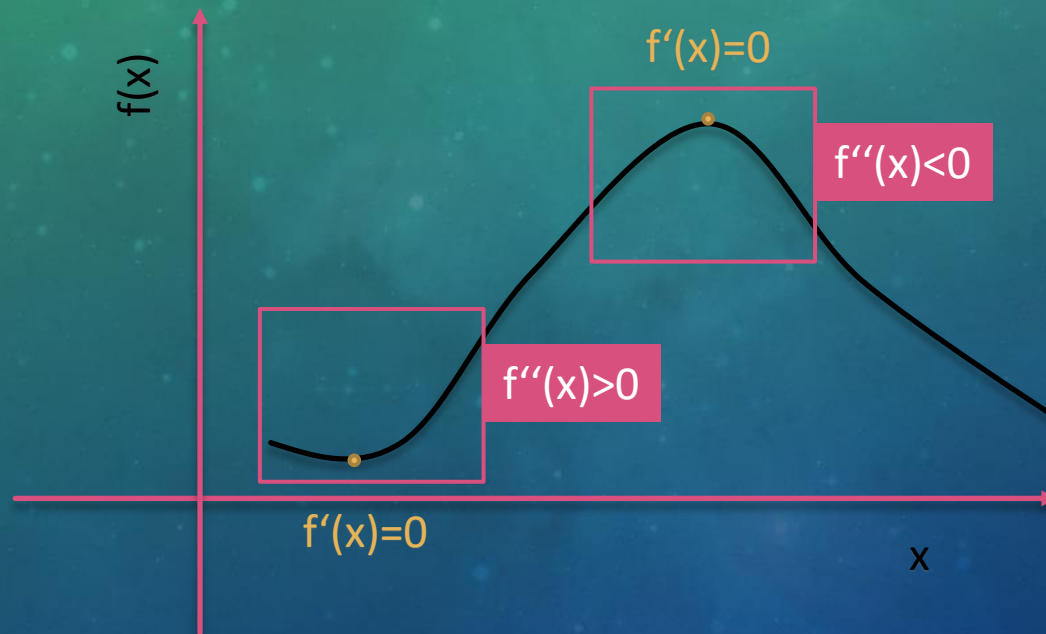
INTEGRALRECHNUNG MIT EINER VERÄNDERLICHEN

WIEDERHOLUNG: ABLEITUNGEN



"Dieses Foto"
von
Unbekannter
Autor ist
lizenziert
gemäß [CC BY](#)

WIEDERHOLUNG: ABLEITUNGEN



$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 + 2x^2 - 1 \\f'(x) &= 3x^2 + 4x \\f''(x) &= 6x + 4\end{aligned}$$

Kritische Punkte: (Flachstellen)

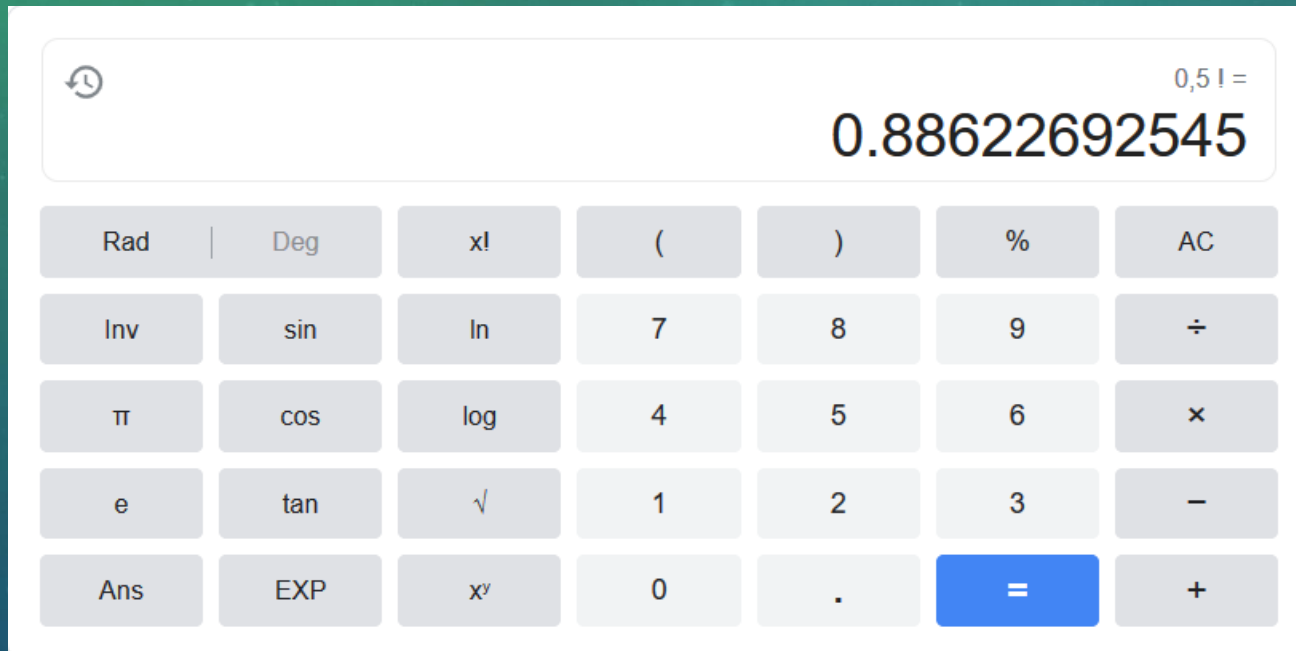
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; -\frac{4}{3}\right\}$$

Charakterisierung:

$$f''(0) = 4 > 0$$

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -4 < 0$$

WIEDERHOLUNG: ABLEITUNGEN



$f(x)$	$f'(x)$
x^k	kx^{k-1}
e^x	e^x
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$ $\cos(x)$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

0.5!

↑

Klicken Sie hier, um 0,5!
zu berechnen (Google-Rechner)

DIE DEFINITION VON EULER

Leonard Euler (1707-1783) hatte u.a. die Idee, die Fakultät über ein Integral zu definieren (Gamma-Funktion).
Über ein sogenanntes „uneigentliches Integral“:

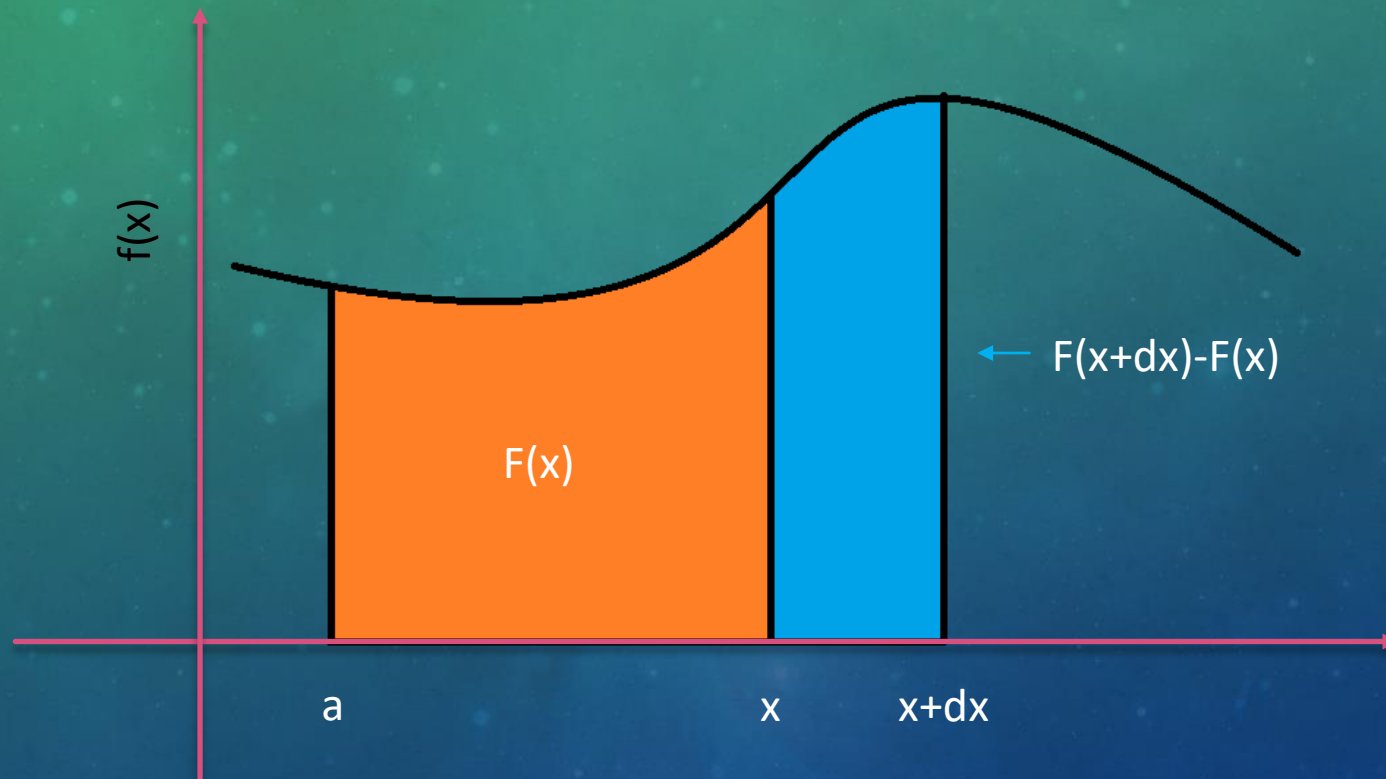
$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Wenn ich $n!$ schreibe,
meine ich ab jetzt das.

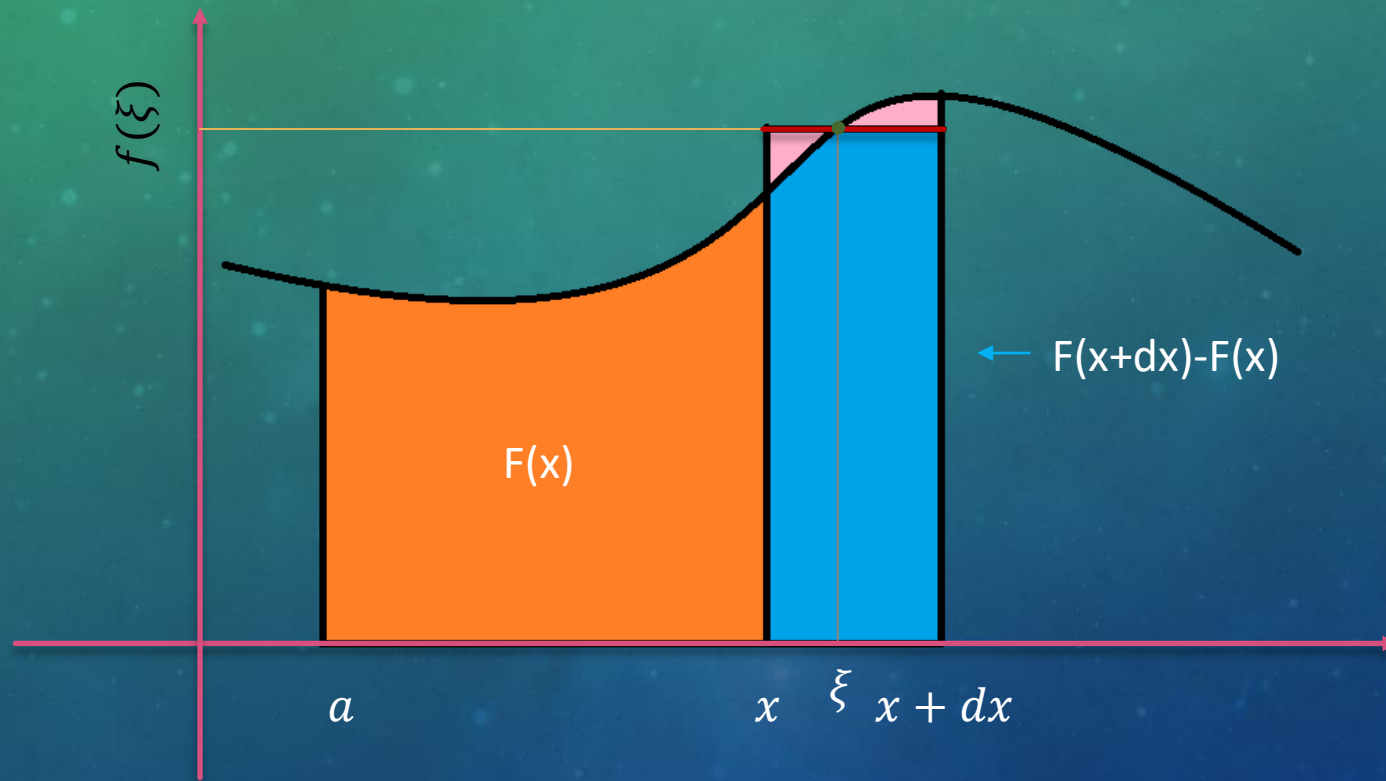
Wir wollen in dieser Vorlesungsstunde erfahren, was dieser Ausdruck bedeutet, warum dieses Integral eine „gute“ Definition für die Fakultät ist (n darf jetzt eine reelle Zahl sein), wie man dieses Integral berechnet und (nicht umfassend) wie dann die Ableitung von $n!$ aussieht.

Ganz genau genommen, darf n sogar eine komplexe Zahl sein.

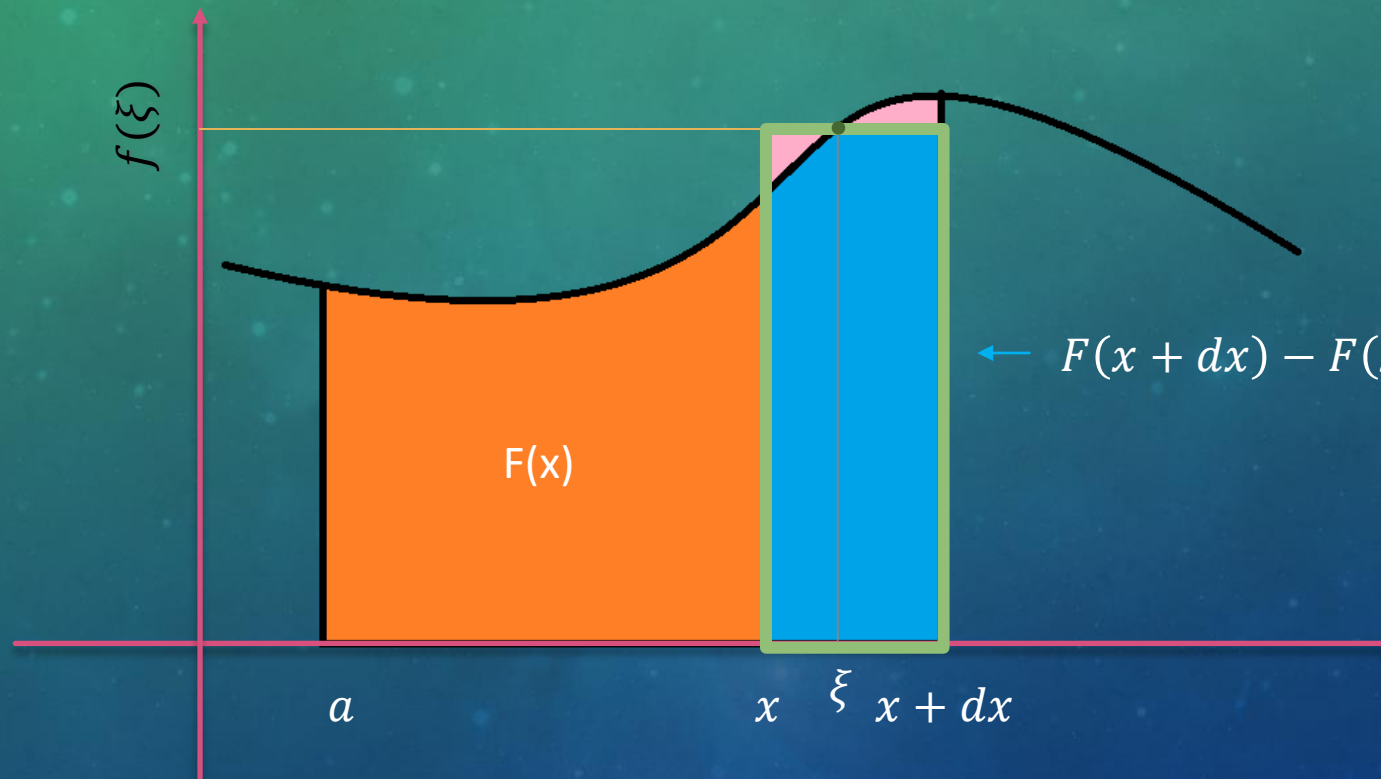
INTEGRIEREN = FLÄCHE BERECHNEN



INTEGRIEREN = FLÄCHE BERECHNEN



INTEGRIEREN = FLÄCHE BERECHNEN



$$\leftarrow F(x + dx) - F(x) = dx \cdot f(\xi)$$



HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL-/INTEGRALRECHNUNG

$$F(x + dx) - F(x) = dx \cdot f(\xi),$$

$$\xi \in [x, x + dx]$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} = f(\xi)$$



Standardteil

$$F'(x) = f(x)$$

Das ist die Beweisidee des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Wer es etwas genauer wissen möchte, Höre sich die Hauptsatzkantate von Friedrich Wille an. [Hier](#) von einer Abiabschlussklasse vertont.

HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL-/INTEGRALRECHNUNG

$$F(x + dx) - F(x) = dx \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x + dx]$$

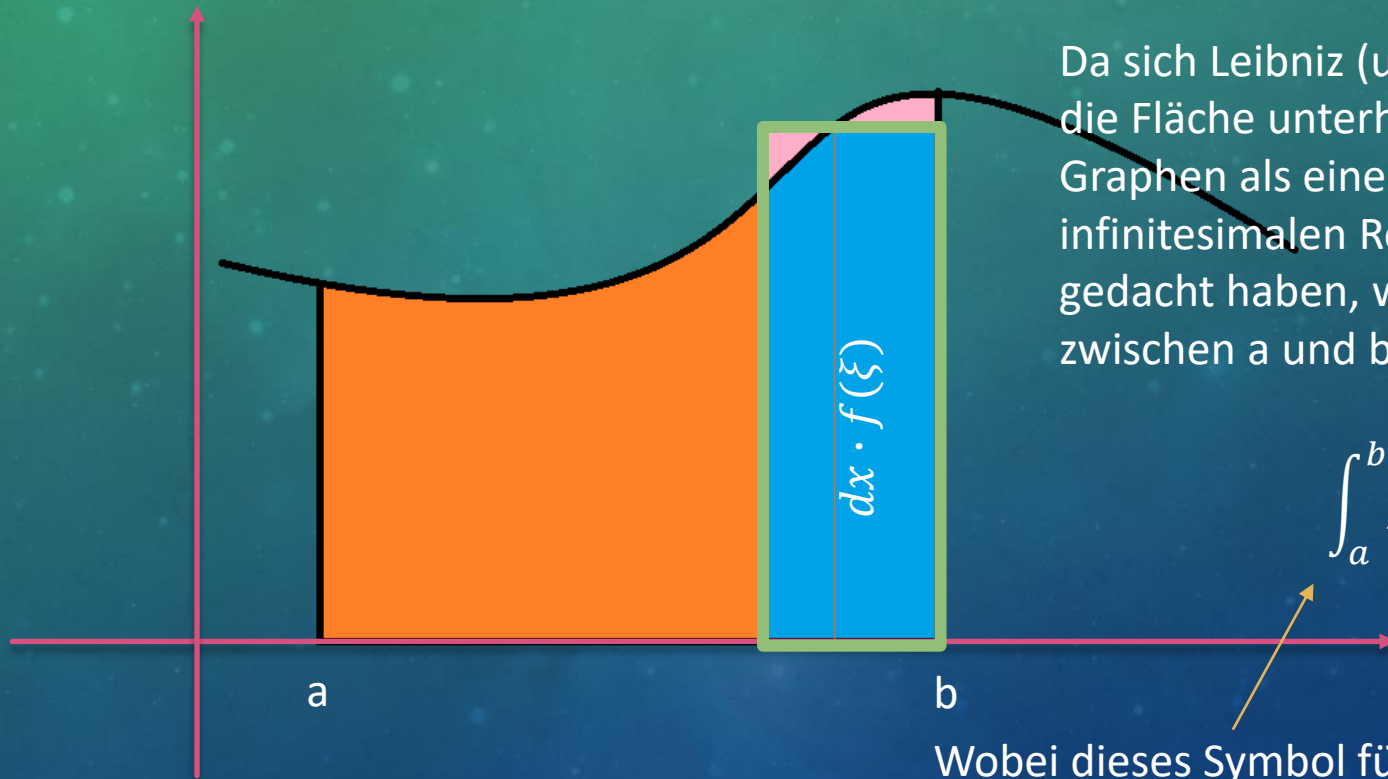
$$\Leftrightarrow \frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} = f(\xi)$$

Standardteil

$$F'(x) = f(x)$$

Hierzu noch ein Kommentar: x ist die nächstgelegene reelle Zahl zu $x+dx$. Da $\xi \in [x, x + dx]$, ist x auch die nächstgelegene reelle Zahl zu ξ . Dass $f(x)$ auch der Standardteil von $f(\xi)$ ist, liegt wiederum an der Stetigkeit von f . (Durchgezogene Linie)

SCHREIBWEISE DES INTEGRALS NACH LEIBNIZ

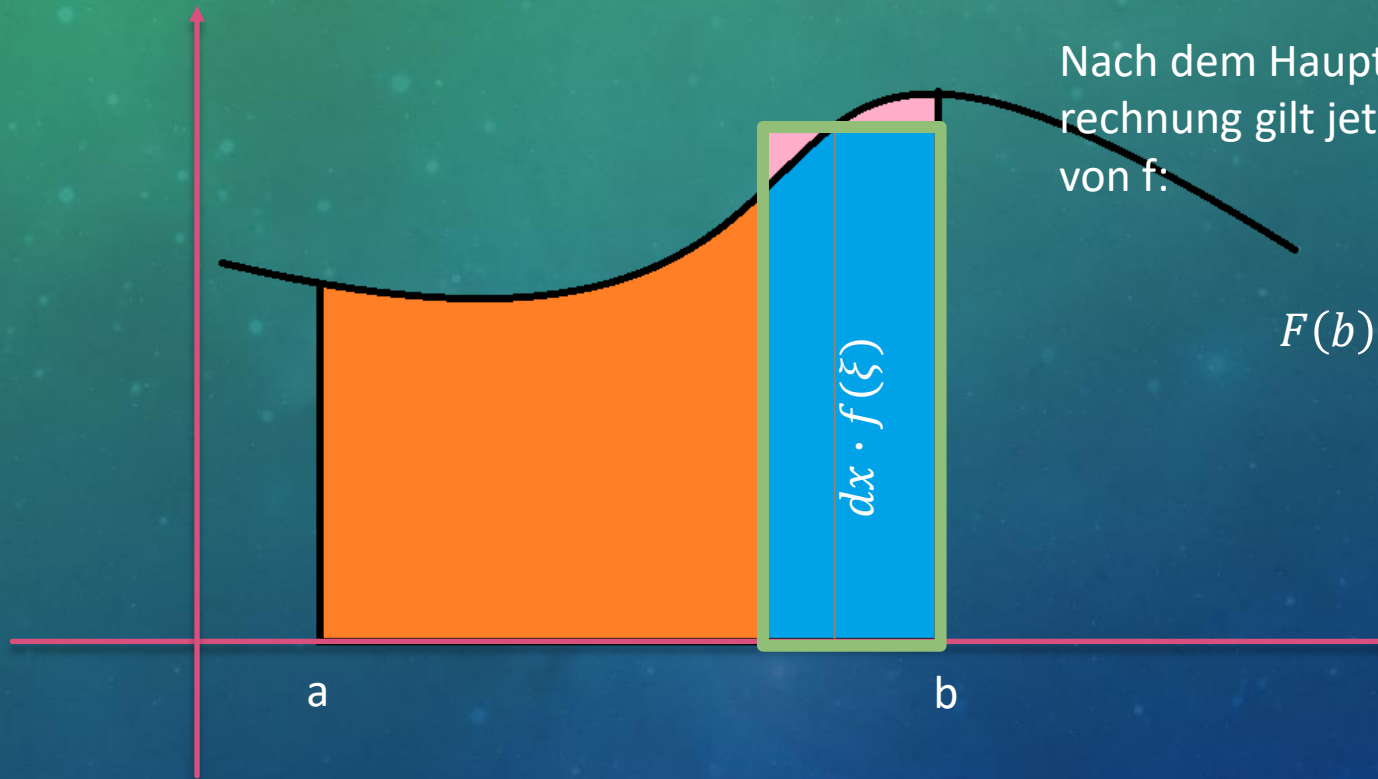


Da sich Leibniz (und Riemann) die Fläche unterhalb eines Graphen als eine Summe solcher infinitesimalen Rechtecksflächen gedacht haben, wird das Integral zwischen a und b auch so geschrieben:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Wobei dieses Symbol für ein großes S (für „Summe“) steht und das hier die Rechtecksflächen sind. „Das Integral $f(x)dx$ in den Grenzen a bis b.“

SCHREIBWEISE DES INTEGRALS NACH LEIBNIZ

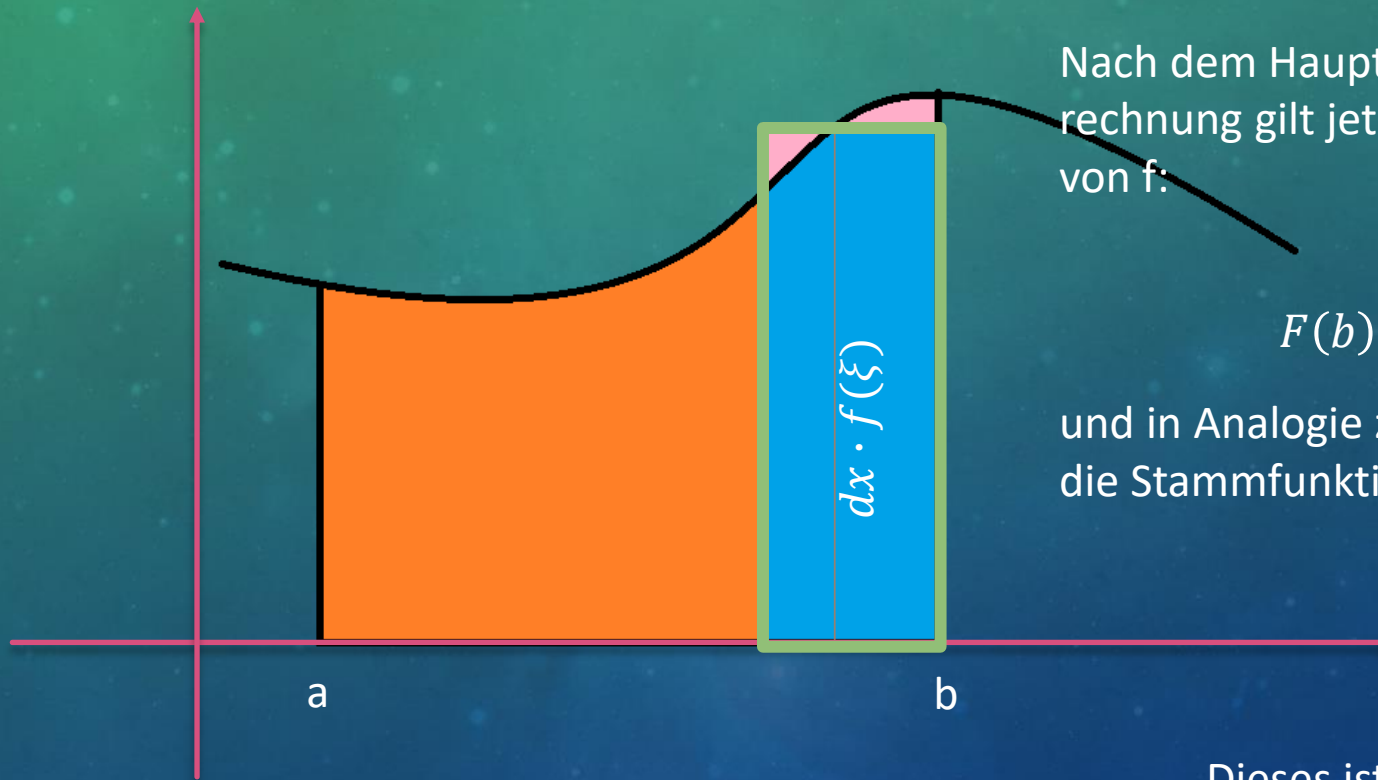


Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt jetzt also mit einer Stammfunktion F von f :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dieses ist das „bestimmte Integral“.

SCHREIBWEISE DES INTEGRALS NACH LEIBNIZ



Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt jetzt also mit einer Stammfunktion F von f :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

und in Analogie zu dieser Notation, werden die Stammfunktionen von f notiert als:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Dieses ist das „unbestimmte Integral“.

BEISPIEL

- Gesucht ist die Fläche unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ in dem Intervall $[2;3]$. Also der Wert des bestimmten Integrals:

$$\int_2^3 x^2 dx.$$

- Dazu muss man zunächst eine Stammfunktion von x^2 berechnen, also das unbestimmte Integral $\int x^2 dx$. Dieses ist die Menge(!) aller Funktionen:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

denn konstante Summanden abgeleitet ergeben 0 und $F'(x)=f(x)$. c ist die „Integrationskonstante“.

- Jetzt kann man die Fläche als die Differenz der Stammfunktionswerte ausrechnen:

$$\int_2^3 x^2 dx = [F(x)]_2^3 = F(3) - F(2) = \left(\frac{1}{3}3^3 + c\right) - \left(\frac{1}{3}2^3 + c\right) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

Merken Sie sich diese Schreibweise für die Differenz

ES GIBT AUCH NEGATIVE WERTE DES INTEGRALS

- Flächenstücke, die unterhalb der x-Achse verlaufen, haben ein negatives Integral. Das Integral ist also die Fläche unterhalb des Graphen von f für positives $f(x)$, und davon abgezogen wird die Fläche unterhalb der x-Achse (also für negatives $f(x)$). So ist z.B.

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0,$$

da die Fläche von -2 bis 0 unterhalb der x-Achse genau der Fläche von 0 bis 2 über der x-Achse entspricht. Rechnen Sie es mit Hilfe von Stammfunktionen nach!

- Dreht man die Integrationsrichtung um, dann ändert sich auch das Vorzeichen des Integrals:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

- Damit Sie sich das merken können: [YouTube Video](#)

ELEMENTARE STAMMFUNKTIONEN

Da Integrieren und Differenzieren nun also invers zueinander sind, kann man auch die Tabelle der Ableitungen benutzen, um die Tabelle der Stammfunktionen zu berechnen (leiten Sie $F(x)$ ab!):

$f(x)$	$f'(x)$
x^k	kx^{k-1}
e^x	e^x
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$ $\cos(x)$	$\cos(x)$ $-\sin(x)$

$f(x)$	$F(x)$
x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1} + c$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln(x) + c$
$\sin(x)$ $\cos(x)$	$-\cos(x) + c$ $\sin(x) + c$

Zudem gilt (Summen und konstante Faktoren):

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Man sagt: Differentiation und Integration sind „lineare Operationen“ (es gelten Summen- und Konstante-Faktor-Regel).

So weit, so gut. Haben wir jetzt also schon die Definition der Fakultät von Leonard Euler verstanden?

Zwei Probleme bleiben noch:

1. Wie lautet die Stammfunktion?
2. Was machen wir mit einer „Grenze“, die unendlich ist?

N EULER

... die Idee, die Fakultät über ein Integral zu definieren. Über das Integral“:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Wir wollen in dieser Vorlesungsstunde erfahren, was dieser Ausdruck bedeutet, warum dieses Integral eine „gute“ Definition für die Fakultät ist (n darf jetzt eine reelle Zahl sein), wie man dieses Integral berechnet und wie dann die Ableitung von n! aussieht.

„EULERS“ STAMMFUNKTIONEN AUSRECHNEN

$$F_n(x) = \int x^n \cdot e^{-x} dx$$

Die Stammfunktionen hängen von n ab. Für jedes n ergeben sich andere Stammfunktionen.

Hier müssen wir zunächst lernen, wie sich das Produkt von zwei Funktionen integrieren lässt. Von den beiden Faktoren, x^n und e^{-x} , kennen wir die Stammfunktionen.

[Hier](#) noch ein erklärendes Video
aus dem Netz...

PRODUKTE INTEGRIEREN: PARTIELLE INTEGRATION

Wir wissen, wie man das Produkt von zwei Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ableitet. Produktregel salopp ausgedrückt:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Da jedoch Integration und Differentiation zueinander „invers“ sind, kann man diese Gleichung auf beiden Seiten integrieren und erhält (laut Summenregel):

$$u \cdot v = \int u' \cdot v \, dx + \int v' \cdot u \, dx \Leftrightarrow \int v' \cdot u \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

u und v sind nicht konstant!
Daher kann man sie nicht vor das Integral
ziehen.

UMFORMUNGEN MIT PARTIELLER INTEGRATION

Wir wollen nun damit die Stammfunktionen $F_n(x)$ für Eulers Idee mit $n=1$ berechnen:

$$\int x \cdot e^{-x} dx$$

mit Hilfe der gerade hergeleiteten Formel

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Um diese Formel auf das obige Integral anzuwenden, muss man einen der beiden Faktoren jetzt als $u(x)$ setzen und einen als $v'(x)$. $u(x)$ muss man für die partielle Integration ableiten $u'(x)$, und für $v'(x)$ muss man eine Stammfunktion $v(x)$ finden (siehe rechte Seite der Gleichung). Da Polynome beim Ableiten einen Grad verlieren, eignen sie sich gut zum Ableiten, also wählen wir für die Formel $u(x)=x$ und $v'(x)=e^{-x}$.

UMFORMUNGEN MIT PARTIELLER INTEGRATION

Wichtiger Hinweis: Eine Stammfunktion von $v'(x) = e^{-x}$ ist $v(x) = -e^{-x}$, denn wenn man $-e^{-x}$ nach x ableiten will, dann muss man die Kettenregel verwenden. Die Funktion $-e^{-x}$ ist eine Verkettung von zwei Funktionen: Exponentialfunktion angewendet auf $-x$ (was ja nicht x ist). $-e^{-x} = -g(h(x))$, wobei $g(h) = e^h$ und $h(x) = -x$.

$$\int x \cdot e^{-x} dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -x \cdot e^{-x} - (e^{-x} + c)$$

Diagramm zur Zuweisung von u und v' in der partiellen Integration:

- u (gelb) zeigt auf x in $x \cdot e^{-x}$
- v' (gelb) zeigt auf e^{-x} in $x \cdot e^{-x}$
- u (gelb) zeigt auf x in $1 \cdot (-e^{-x})$
- v (gelb) zeigt auf $-e^{-x}$ in $1 \cdot (-e^{-x})$
- u' (gelb) zeigt auf 1 in $1 \cdot (-e^{-x})$
- v (gelb) zeigt auf $-e^{-x}$ in $1 \cdot (-e^{-x})$

Ein orangefarbener Pfeil weist von der Beschriftung "Stammfunktion von $(-e^{-x})$ " auf $-e^{-x}$ in der zweiten Integrationsformel.

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$



Zur Auswahl der Zuweisung von u und v'
[hier](#) ein Video für Mathematikstudierende

WERT DES INTEGRALS BERECHNEN

Jetzt haben wir also die Stammfunktionen für $n=1$ gefunden:

$$F_1(x) = \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - (e^{-x} + c)$$

Und können damit die Fläche unter der Kurve bestimmen:

$$1! = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx = F_1(\infty) - F_1(0) = \underbrace{-\infty \cdot e^{-\infty}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} - \underbrace{e^{-\infty}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{0 \cdot e^{-0}}_{=0} + \underbrace{e^{-0}}_{=1} = 1$$


STAMMFUNKTIONEN FÜR NATÜRLICHES N

Mit Hilfe der partiellen Integrationen rechnen wir nun analog für allgemeine n aus:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int \overset{u}{x^n} \cdot \overset{v'}{e^{-x}} dx = x^n \cdot (-e^{-x}) - n \int x^{n-1} \cdot (-e^{-x}) dx \\ &= -x \cdot e^{-x} + n \int x^{n-1} \cdot e^{-x} dx \\ &= -x \cdot e^{-x} + n F_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Das Interessante an dieser Rechnung ist, dass sich eine Rekursionsvorschrift ergibt: Kennen wir nämlich die Stammfunktionen $F_{n-1}(x)$, so können wir daraus die Stammfunktionen $F_n(x)$ ausrechnen. Denn $F_n(x) = -x \cdot e^{-x} + n F_{n-1}(x)$. Wir kennen ja bereits $F_1(x)$, also kennen wir mit Hilfe der Rekursion auch $F_2(x)$, also kennen wir mit Hilfe der Rekursion auch $F_3(x)$, also kennen wir mit Hilfe der Rekursion auch $F_4(x)$... Mit Hilfe der Rekursion können wir $F_n(x)$ für alle natürlichen Zahlen n ausrechnen.

WERT DES INTEGRALS FÜR NATÜRLICHES N

Und mit Hilfe der Rekursion können wir auch jetzt den Wert des uneigentlichen Integrals für (natürliches) n berechnen, indem wir die Integralgrenzen einsetzen:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Definition von Euler

$$= F_n(\infty) - F_n(0)$$

Hauptsatz Integral/Differentialr.

$$= [-x \cdot e^{-x}]_0^{\infty} + n \cdot (F_{n-1}(\infty) - F_{n-1}(0))$$

Rekursionsformel

$$= 0 + n \cdot (n-1)! \quad \leftarrow = \int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$$

Wieder die Definition von Euler

Ich kenne $1!=1$ bereits durch Ausrechnen des Integrals mit der Stammfunktion $F_1(x)$. Obige Formel sagt jetzt, dass $2! = 2 \cdot 1! = 2$ und $3! = 3 \cdot 2! = 6$ und $4! = 4 \cdot 3! = 24$... und $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$. So ergibt sich, dass die Fakultät einer natürlichen Zahl n einfach das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n ist.

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$



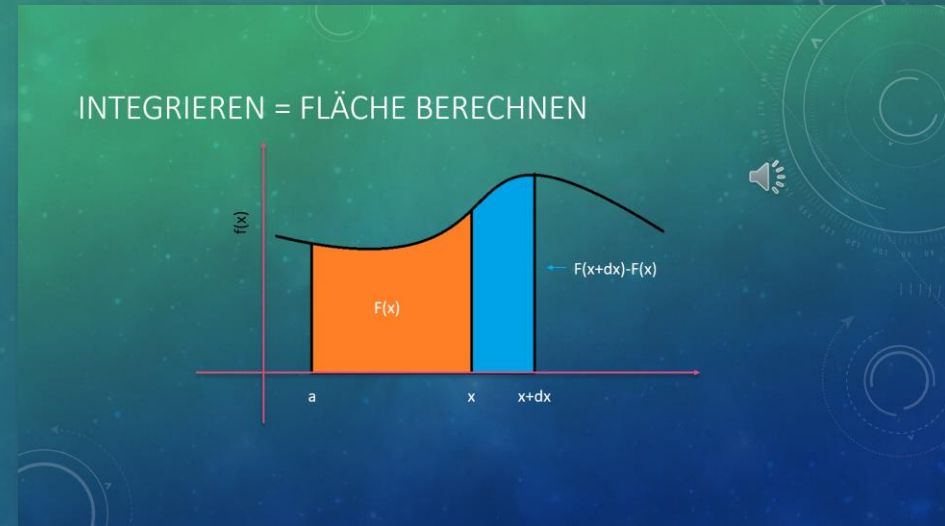
Aber was, wenn n keine natürliche Zahl ist???

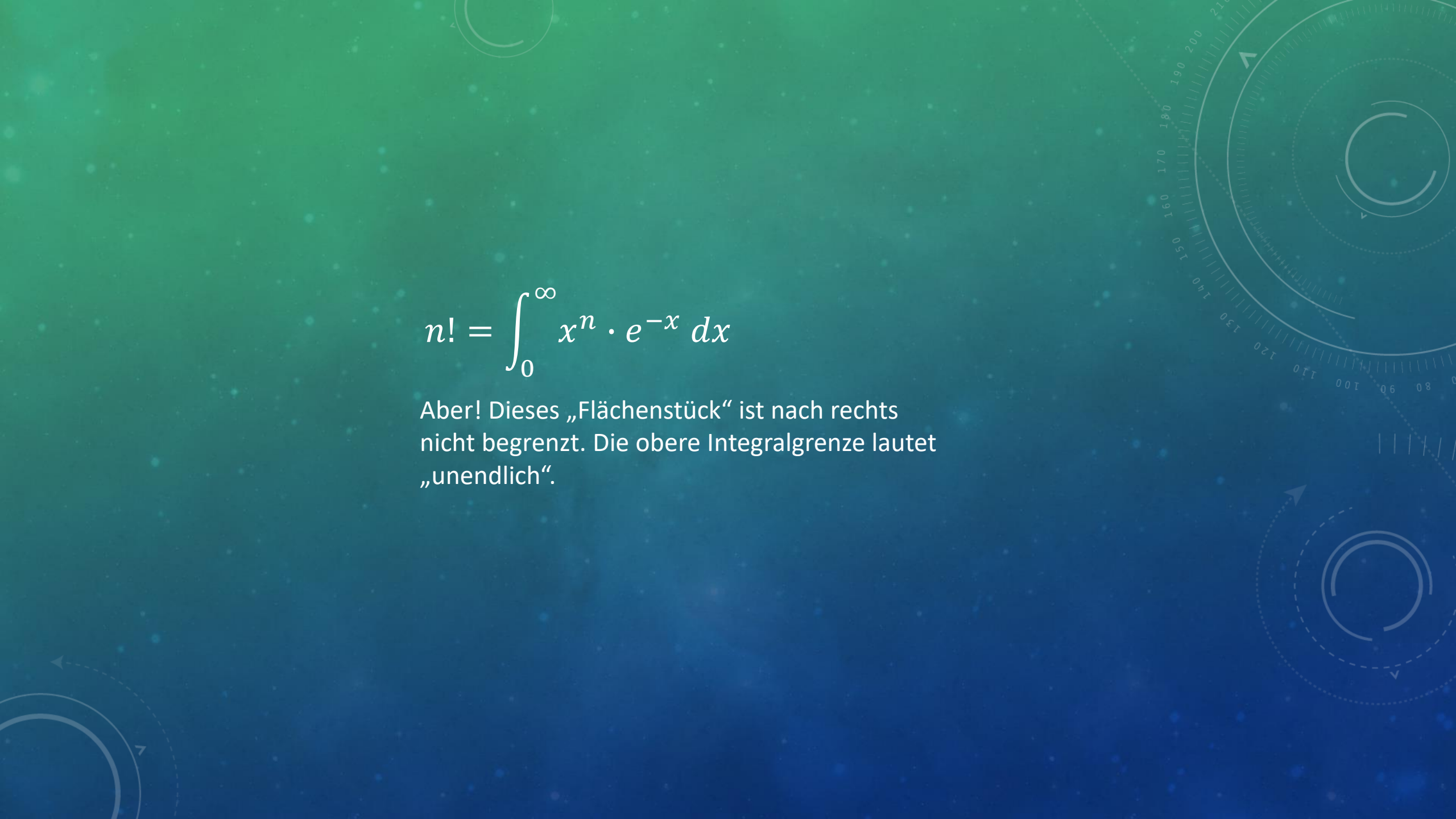
Dann kann man i.A. die Stammfunktionen nicht elementar ausrechnen. Für sehr viele Funktionen kennen wir keinen elementaren Funktionsausdruck für die Stammfunktionen...

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Wenn man also die Stammfunktion nicht „analytisch“ hinschreiben kann, dann hilft es, sich daran zu erinnern, was Integrieren bedeutet: Das Berechnen einer Fläche!

Vielleicht kann man den Flächeninhalt unter der Kurve auch gut näherungsweise (numerisch) berechnen? Eine Herangehensweise kennen wir schon: Die Fläche in „Fast“-Rechtecke zerlegen (mit kleinem dx) und die Flächenstücke aufaddieren, ...




$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Aber! Dieses „Flächenstück“ ist nach rechts nicht begrenzt. Die obere Integralgrenze lautet „unendlich“.

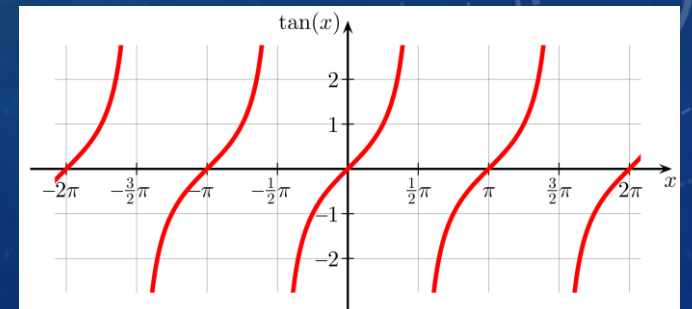
SUBSTITUTION

In diesem Fall soll also x von 0 bis unendlich laufen

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

Setzt man allerdings $x = \tan(z)$ mit der Tangensfunktion und lässt dabei z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ laufen, dann läuft x (wie gewünscht) von 0 bis unendlich. Also könnte man stattdessen folgendes Integral rechnen:

$$n! = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(z)^n \cdot e^{-\tan(z)} dx$$



SUBSTITUTION

$$n! = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(z)^n \cdot e^{-\tan(z)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(z)^n \cdot e^{-\tan(z)} \frac{dx}{dz} dz$$

← mit dz erweitern



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(z)^n \cdot e^{-\tan(z)} \left((\tan(z))^2 + 1 \right) dz \leftarrow \frac{dx}{dz} = \frac{d(\tan(z))}{dz} = (\tan(z))^2 + 1$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan(z)^{n+2} + \tan(z)^n) \cdot e^{-\tan(z)} dz$$

Hier ein anderes Beispiel für Substitution aus dem Netz.

NUMERISCHE INTEGRATION

Jetzt lesen wir diesen Ausdruck (so wie Leibniz und Riemann es taten) als Summe, als wäre dz eine sehr, sehr kleine Zahl...

$$n! = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan(z)^{n+2} + \tan(z)^n) \cdot e^{-\tan(z)} dz$$

$\approx$ Summe der Flächenstücke $(\tan(z)^{n+2} + \tan(z)^n) \cdot e^{-\tan(z)} \cdot dz$, wobei zum Beispiel $dz=0.00001$ sein soll und z von 0.00001 (in Schritten von dz) bis ca. $\pi/2$ läuft.

Hier ein Beispiel, wie man so die Fakultät von 0.5 mit octave-online.net näherungsweise berechnen kann:

```
octave:2> n=0.5
n = 0.50000
octave:3> intervall=0.00001:0.00001:pi/2;
octave:4> z=intervall; n_fakultaet = sum((tan(z).^(2+n)+tan(z).^n).*exp(-tan(z))*0.00001)
n_fakultaet = 0.88623
```

DIE MODERNE MATHEMATIK (NUR AUS INTERESSE, NICHT FÜR DIE KLAUSUR!)

- Das mit den Flächenstücken, die (laut Riemann) für immer kleineres dx zu rechnen und aufzusummieren sind, um den Wert des Integrals zu berechnen, hat sich als problematisch herausgestellt. Denn Grenzwertprozesse und Berechnung von Längen/Flächen zu kombinieren, läuft meistens schief. Schauen Sie sich dazu z.B. das [Diagonalparadoxon](#) an: Eine Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1 wird durch eine „treppenförmige“ Linie angenähert. Die Länge dieser Linie ist stets 2. Geht man jedoch zu mehr und mehr Stufen über, dann kann man die Linie nicht mehr von der Diagonalen unterscheiden, aber die Länge ist immer noch 2... (Hier mein [Versuch](#), das Paradoxon zu lösen)
- Henri Léon Lebesgue hatte eine Idee, wie man dieses [unlösbare Maßproblem](#) der Mathematik angeht. Anstatt die x-Achse in Abschnitte der Länge dx zu zerlegen, zerlegt man die y-Achse in solche Abschnitte. So wurde das [Lebesgue-Integral](#) erfunden, das heute anstelle des Riemann-Integrals in der Mathematik verwendet wird.

Die Ableitung der Fakultät:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-x} dx$$

$$\frac{d}{dn} n! = \int_0^{\infty} \frac{d}{dn} (x^n \cdot e^{-x}) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dn} x^n \cdot e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^n \cdot \ln(x) \cdot e^{-x} dx$$

Leibnizregel für Parameterintegrale



Polygammafunktion