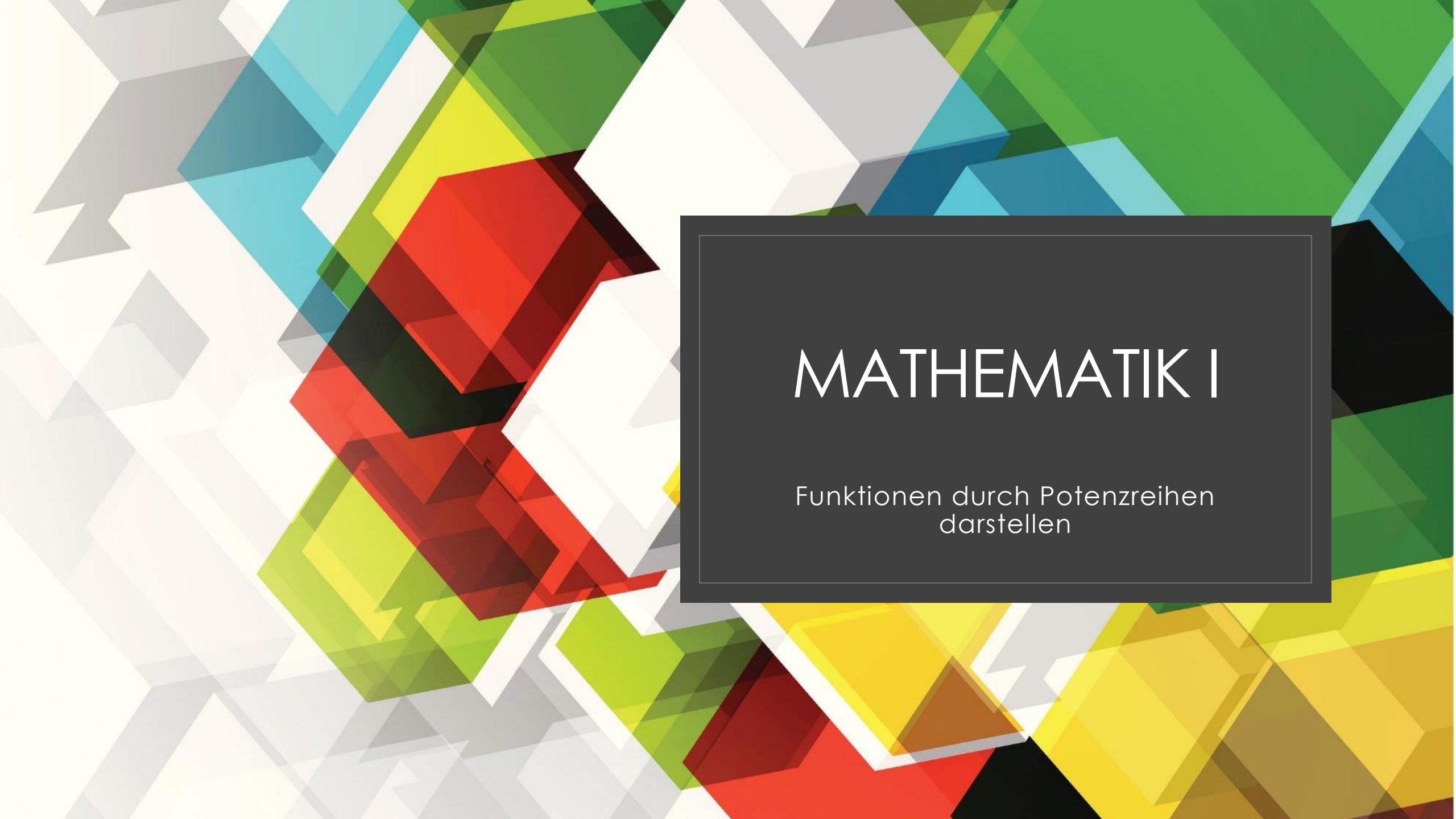




MATHEMATIK I

Funktionen durch Potenzreihen
darstellen

Rechnen Sie aus!

Sie haben in der letzten Vorlesung erfahren, wie man Funktionen (z.B. den Sinus) mit Hilfe eines „unendlichen“ Polynoms (einer sogenannten „Reihe“) darstellen kann.

Also können Sie jetzt rechnen:

www.octave-online.net

$\cos(i)$

$\ln(3)$



```
octave:2> n = 5; %Grad des Taylorpolynoms
octave:3> x = i; % Stelle der Auswertung
octave:4> k=0:n; % Laufindex über die Summanden
octave:5> cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5431e+00 - 7.1960e-17i
octave:6>
octave:6> n=5; % Grad des Polynoms
octave:7> x = 3; % Stelle der Auswertung
octave:8> k=1:n; % Laufindex über die Summanden
octave:9> logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 5.0667
```

Konvergente Reihe (cos(i))

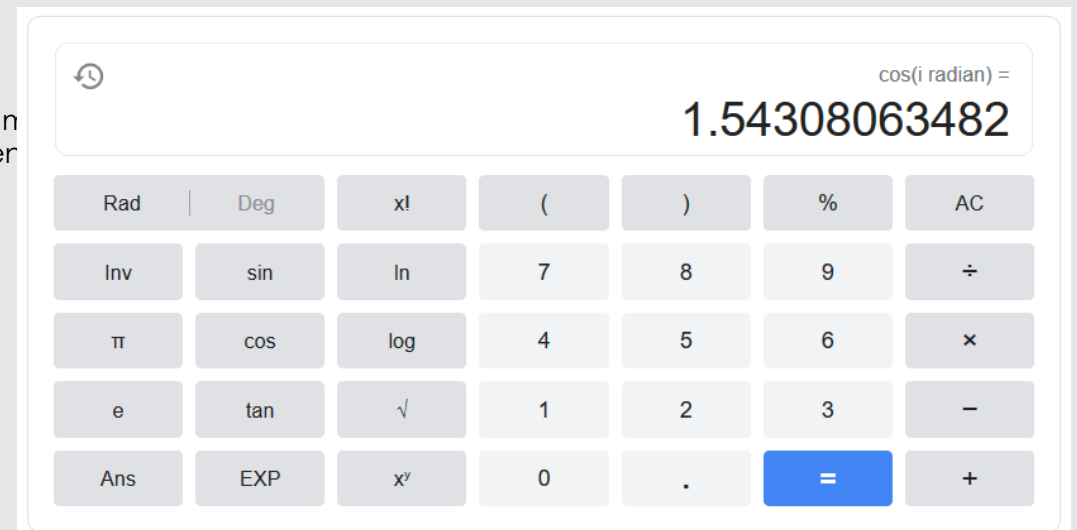


```
octave:18> n=1; x=i; k=0:n; cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5000e+00 - 6.1232e-17i
octave:19> n=2; x=i; k=0:n; cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5417e+00 - 7.1438e-17i
octave:20> n=3; x=i; k=0:n; cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5431e+00 - 7.1948e-17i
octave:21> n=4; x=i; k=0:n; cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5431e+00 - 7.1960e-17i
octave:22> n=5; x=i; k=0:n; cosinus_x = sum((-1).^k.*(x.^(2*k))./factorial(2*k)) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
cosinus_x = 1.5431e+00 - 7.1960e-17i
```

$$\cos(i) \approx 1.5431 \cdot 10^0 - 7.1960 \cdot 10^{-17} i$$
$$\approx 1.5431$$

Dieser Summ
Der Taschen
machen...

Was sagt Google?



Divergente Reihe ($\ln(3)$)

```
octave:25> n=1; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 2
octave:26> n=2; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 0
octave:27> n=3; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 2.6667
octave:28> n=4; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = -1.3333
octave:29> n=5; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 5.0667
octave:30> n=6; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = -5.6000
octave:31> n=7; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 12.686
octave:32> n=9; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = 37.575
octave:33> n=10; x=3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k) %Wert des Taylorpolynoms an der Stelle x
logarithm_x = -64.825
```

Taschenrechner: $\ln(3) \approx 1.09861$



Lösung des ln -Problems

$$\ln(3) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$



```
octave:12> n=20; x=1/3; k=1:n; logarithm_x = sum((-1).^(k+1).*((x-1).^k)./k)
logarithm_x = -1.0986
octave:13> log(1/3)
ans = -1.0986
```

In dieser Vorlesung geht es darum, wie man bestimmen kann, für welche x die Taylorreihenentwicklung funktioniert und für welche x nicht....

Wichtige mathematische Begriffe

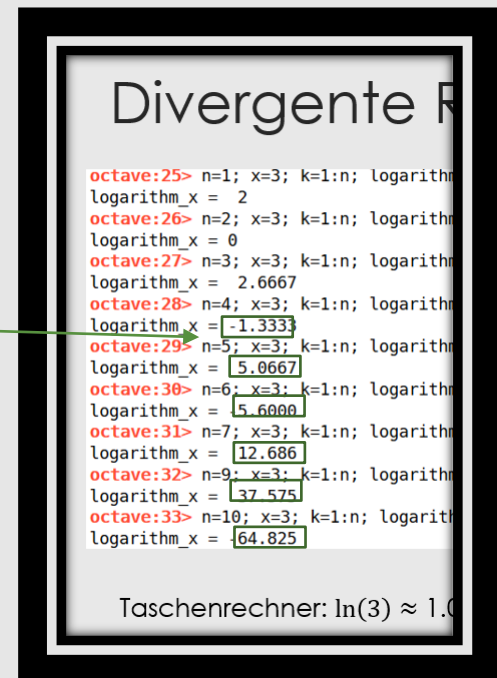
- Es geht also wieder um das Thema Grenzwerte. Für Folgen von Zahlen hatten wir das Thema bereits (z.B. unter welchen Bedingungen eine Folge von Zahlen, die man aus einer Fixpunktiteration gewinnt, gegen einen Fixpunkt konvergiert).
- Jetzt sind es jedoch Summen von Zahlen und unendliche Summen von Monomen. Um mal die Nomenklatur für diese Objekte zu klären, dient die folgende Tabelle mit Beispielen:

ohne „Unbekannte x “	mit „Unbekannter x “
$\{1, i, 3 + i\} \subset \mathbb{C}$ komplexe Zahlen	$\{2x^2, 3x, -2\}$ das sind Monome
$(1, 10, 100, 1000 \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge (unendlich viele Zahlen)	$2x^2 + 3x - 2 \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom (Summe von Monomen)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ heißt Reihe (eine unendliche Summe von Zahlen)	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ heißt Potenzreihe (ein Polynom vom Grad ∞). Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe.

Warum hat $\ln(3)$ nicht funktioniert?

Schauen Sie sich noch einmal an, wie der natürliche Logarithmus von 3 durch Taylorpolynome ausgedrückt wird. Welche Werte haben Sie dort für die einzelnen Polynome ausgerechnet? Der Grund dafür, dass das Verfahren nicht konvergierte war: Die Summanden der Reihe werden für wachsendes n betragsmäßig immer größer und größer, und zwar so, dass die Summen irgendwann betragsmäßig auch immer größer wurden.

Damit also so eine Reihe überhaupt konvergiert, müssen die Summanden (betragsmäßig) immer kleiner und kleiner werden, also: **Die Summanden müssen eine Nullfolge bilden, damit die unendliche Summe (also die Reihe) konvergieren kann.** Reicht das als Bedingung aus?



```
octave:25> n=1; x=3; k=1:n; logarithm_x = 2
octave:26> n=2; x=3; k=1:n; logarithm_x = 0
octave:27> n=3; x=3; k=1:n; logarithm_x = 2.6667
octave:28> n=4; x=3; k=1:n; logarithm_x = -1.3333
octave:29> n=5; x=3; k=1:n; logarithm_x = 5.0667
octave:30> n=6; x=3; k=1:n; logarithm_x = 5.6000
octave:31> n=7; x=3; k=1:n; logarithm_x = 12.686
octave:32> n=9; x=3; k=1:n; logarithm_x = 37.575
octave:33> n=10; x=3; k=1:n; logarithm_x = 64.825
```

Taschenrechner: $\ln(3) \approx 1.0$

Ein Rätsel

Die Summanden müssen eine Nullfolge bilden, damit die Reihe konvergieren kann.

Reicht das als Bedingung aus?

Ein Beispiel für eine Reihe, in der die Summanden immer kleiner werden ist: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (die harmonische Reihe). Sie beginnt so:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1,5 &= 1 + \frac{1}{2} \\ 1,8\bar{3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ 2,08\bar{3} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mit jedem Schritt kommt immer weniger und weniger hinzu. Also hat diese Reihe einen Grenzwert? Genauer: Hat **diese** Folge (1; 1,5; 1,8 $\bar{3}$; 2,08 $\bar{3}$) von „Teilsummen“ einen Grenzwert? Entscheiden Sie JETZT...

Das ist zwar die richtige Antwort, aber haben Sie geraten? Wissen Sie, wie man zeigt, dass diese Reihe über alle Grenzen hinaus wächst? X

Die harmonische Reihe divergiert

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

Dass die harmonische Reihe divergiert zeigt man mit Hilfe des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums: Man fasst immer 2^k Summanden der Reihe zusammen und sieht, dass sich als Summe immer mindestens $\frac{1}{2}$ ergibt.

Also (schwarz): 1 ist größer als $\frac{1}{2}$. Dann (rot): $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{2}$. Dann (grün): Die Summe aus $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ist größer als $\frac{1}{2}$, da ja $\frac{1}{3}$ größer ist als $\frac{1}{4}$ und $2 \cdot \frac{1}{4}$ auch $\frac{1}{2}$ ist. Dann (blau): $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ sind alle größer als $\frac{1}{8}$ und $4 \cdot \frac{1}{8}$ ist $\frac{1}{2}$. Und so weiter...

Man addiert also unendlich oft Ausdrücke, die mindestens $\frac{1}{2}$ sind... das wird unendlich groß.

Die geometrische Reihe

Dass die Folge der Summanden eine Nullfolge ist, ist zwar *notwendig* für die Konvergenz der Reihe, es reicht aber nicht als Kriterium für die Konvergenz der Reihe aus. Es ist kein *hinreichendes* Kriterium. Die (positiven) Summanden müssen auf jeden Fall schneller als $1/k$ gegen Null konvergieren.

Ein weiteres Beispiel für eine Reihe: Man suche sich eine Zahl q aus. Wenn $|q| < 1$, dann ist die Folge $1, q, q^2, q^3, q^4 \dots$ eine Nullfolge. Wenn $|q| > 1$, dann wächst diese Folge über alle Grenzen hinaus (sie divergiert).

Die Frage ist also, ob die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

für $|q| < 1$ konvergiert? Um das zu untersuchen, kann man in diesem Falle tatsächlich die Partialsummen ausrechnen... also die Summe $s_N = \sum_{n=0}^N q^n$ bis zu einem gegebenen N .

Die Partialsummen der geometrischen Reihe

Zunächst multiplizieren wir die Partialsumme mit q :

$$s_N = \sum_{n=0}^N q^n \quad \Rightarrow \quad q \cdot s_N = \sum_{n=0}^N q^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} q^n = \left(\sum_{n=0}^{N+1} q^n \right) - q^0 = s_{N+1} - 1$$

In jedem Schritt dieser Umformung, gibt es mathematisches Denken...

Weiter gilt: $s_{N+1} - s_N = q^{N+1}$ (das ist der Summand, der zur Partialsumme s_N hinzuaddiert wird). In diese Gleichung setzen wir das ein, was wir für s_{N+1} oben heraus gefunden haben. Nämlich: $s_{N+1} = 1 + q \cdot s_N$. Also:

$$1 + q \cdot s_N - s_N = q^{N+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = s_N$$

Was passiert also für unendlich große N ? [Hier](#) finden Sie die Antwort (und auch nochmal obige Herleitung mit anderer Wahl der Buchstaben)

Cauchys Idee

Es geht also darum, dass die Folge (a_n) der Summanden bei der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ schnell genug gegen Null konvergiert (betragsmäßig).

Fallen die Summanden also schneller als die der geometrischen Reihe mit einem $0 \leq q < 1$ ab, dann konvergiert die Reihe, denn die geometrische Reihe konvergiert ja schon. Wenn also

$$|a_n| \leq q^n,$$

gilt, dann gehen die Summanden mindestens so schnell gegen Null, wie die der geometrischen Reihe. Und dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Die Bedingung für Konvergenz (nachdem man die n-te Wurzel zieht) kann man also auch so schreiben:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$



Wurzelkriterium

Es muss also ein $q < 1$ gefunden werden (echt kleiner als 1), so dass die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für die Summanden a_n der Reihe gilt.

Aber muss das für alle n gelten? ... Tatsächlich: Ein paar Ausnahmen werden ja wohl gestattet sein.

Und so gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine Bedingung zu formulieren, wann eine Reihe nach dem sogenannten „Wurzelkriterium“ konvergiert.

Wurzelkriterium I

Gibt es eine positive reelle Zahl $q < 1$, so dass die Abschätzung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle Summanden a_n der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt, dann konvergiert die Reihe.

„für fast alle“ heißt ... „für alle bis auf endlich viele Ausnahmen“.

Wurzelkriterium II

Gibt es eine positive reelle Zahl $q < 1$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Es muss nicht unbedingt gezeigt werden, dass fast alle Summanden kleiner als ein vorgegebenes q sind. Es reicht, wenn die Ausdrücke $\sqrt[n]{|a_n|}$ irgendwann immer echt kleiner als 1 sind. Das ist z.B. dann der Fall, wenn der Grenzwert dieser Ausdrücke echt unterhalb von 1 liegt... daher diese Formulierung.

Aber konvergiert diese Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ immer? Nicht unbedingt... Jetzt kommt die am geschicktesten formulierte Version des Wurzelkriteriums...

Wurzelkriterium III (Cauchy-Hadamard)

Gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Gilt andererseits $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann divergiert sie.



Die alles entscheidende Größe in dieser Untersuchung ist der „limes superior“ von dem bekannten Wurzel Ausdruck. Ist dieser Limes größer als 1, dann divergiert die Reihe (dann werden tatsächlich die Summanden betragsmäßig immer größer). Ist der Limes kleiner als 1, dann konvergiert sie.

Der „limes superior“ ist „der Grenzwert der oberen Schranken“. Genau genommen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{x_n; n \geq N\}$$

(wobei „sup“, die kleinstmögliche obere Schranke der entsprechenden Menge angibt). Es gilt aber

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$



wenn der „einfache“ Grenzwert existiert...

EXKURS

- Was müssen Mathematik-Studierende in der Vorlesung zu Konvergenz von Reihen lernen?

Ich habe [hier](#) mal ein Dokument verlinkt, das zeigt, was Studierende der Mathematik lernen, wenn sie untersuchen wollen, ob die Summanden einer Reihe schnell genug gegen Null konvergieren... Sie untersuchen unterschiedliche „Fallgeschwindigkeiten“ (exponentiell, polynomiell, alternierend) und sie untersuchen auch unterschiedliche Arten von Konvergenz (Konvergenz, absolute Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz). Sie lernen, dass man die Konvergenz einer Reihe mit verschiedenen Kriterien prüfen kann... Auf den ein oder anderen Punkt werden wir auch im Übungszettel noch eingehen. Wir werden das Thema Reihen jedoch viel weniger intensiv behandeln. Für die Klausur wird vor allem der folgende Abschnitt der Vorlesung relevant sein!

Jetzt aber zurück zu den Potenzreihen!

ohne „Unbekannte x “	mit „Unbekannter x “
$\{1, i, 3 + i\} \subset \mathbb{C}$ komplexe Zahlen	$\{2x^2, 3x, -2\}$ das sind Monome
$(1, 10, 100, 1000 \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge (unendlich viele Zahlen)	$2x^2 + 3x - 2 \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom (Summe von Monomen)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ heißt Reihe (eine unendliche Summe von Zahlen)	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ heißt Potenzreihe (ein Polynom vom Grad ∞). Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe.

Das gerade gelernte
Wurzelkriterium
bezieht sich auf Reihen!

Aber was ist mit Potenzreihen?
Wann konvergieren diese?

Konvergenz einer Potenzreihe

Denken Sie jetzt wieder an unser einführendes Beispiel!
Wir wollten den Logarithmus von 3 bzw. von 1/3 rechnen, indem wir die Taylorreihe verwenden:

$$\ln(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4 \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x - 1)^n$$

Für $x=3$ divergiert diese Reihe. Für $x=1/3$ konvergiert sie. Die Konvergenz einer Potenzreihe hängt also davon ab, an welcher Stelle ich sie auswerten möchte.

Konvergenz einer Potenzreihe

So sieht eine allgemeine Potenzreihe aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

In unserem Spezialfall für den Logarithmus sind die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und die Koeffizienten gegeben als $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Konvergenz einer Potenzreihe

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

konvergiert, wenn das Wurzelkriterium gilt, also wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} < 1$.



So sehen die Summanden
der Reihe aus.

Konvergenz einer Potenzreihe

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x - x_0|^n} < 1$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Konvergenz einer Potenzreihe

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x - x_0|^n} < 1$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

Hier steht eine sehr interessante Formel:

Wenn x von x_0 also echt weniger als R entfernt ist, wobei $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, dann konvergiert die Reihe.

Ist allerdings x von x_0 echt weiter als R entfernt, dann divergiert sie (wegen des Wurzelkriteriums).

R ausrechnen für $\ln(x)$

Rechnen wir dieses R mal für den Spezialfall des Logarithmus aus, dort gilt $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$$

Doch was ist der Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$?

R ausrechnen für $\ln(x)$

$\sqrt[n]{n}$ lässt sich auch schreiben als $e^{(n^{-1} \cdot \ln(n))}$. Wenn Sie jetzt gut bei der Regel von de L'Hospital aufgepasst haben, dann können Sie ausrechnen, dass $(n^{-1} \cdot \ln(n))$ gegen 0 konvergiert. Also konvergiert $\sqrt[n]{n}$ gegen $e^0 = 1$.

D.h. für den $\ln(x)$ gilt, dass $R = 1$.

D.h. Wenn $|x - x_0| < 1$, dann konvergiert die Reihenentwicklung von $\ln(x)$. Wenn allerdings $|x - x_0| > 1$, dann divergiert sie. Unsere Entwicklungsstelle war dabei: $x_0 = 1$. Für welche x konvergiert $\ln(x)$ also?

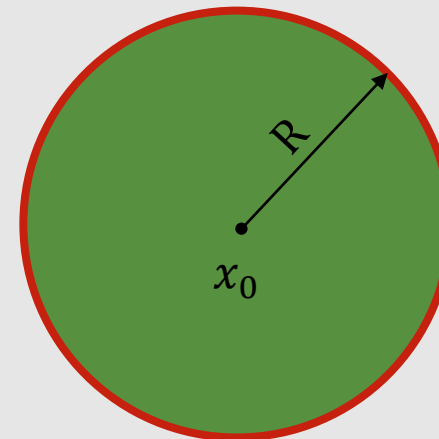
D.h. Die Reihenentwicklung von $\ln(x)$ konvergiert im Intervall $0 < x < 2$. Für $x \leq 0$ oder für $x > 2$ divergiert sie.

$\ln(x)$ für komplexe Zahlen x

Wenn man jetzt noch beachtet, dass die Zahlen x komplex sein dürfen, dann gibt R an, in welchem Radius um die Entwicklungsstelle x_0 die Reihe konvergiert. Daher heißt R auch „**Konvergenzradius**“. Außerhalb dieses Radius divergiert die Reihe. Auf der Kreislinie ... also dort wo $|x - x_0| = R$, kann man keine Aussage machen, ob die Reihe konvergiert oder divergiert. Den Radius berechnet man über die Formel von

Cauchy und Hadamard als $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

In der komplexen Zahlenebene:



R ausrechnen für $\cos(x)$

Rechnen wir jetzt noch den Konvergenzradius von der Reihenentwicklung von $\cos(x)$ aus. Wir haben bereits am Anfang gesehen, dass $\cos(i)$ durch die Reihe ausgerechnet werden konnte und dass für $x=i$ also die Reihe konvergiert.

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

also gilt: $x_0 = 0$ und $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. In die Formel für R einsetzen liefert:

Die Fakultät hat $2n$ Faktoren, von denen (die letzten) n Faktoren größer als n sind. Die Wurzel wächst über alle Grenzen hinaus.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right|}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)!} = \infty$$

FAZIT: Die Reihenentwicklung von $\cos(x)$ konvergiert für alle komplexen (und auch reellen) Zahlen x .

Weiterführende Links

- Um mal zu zeigen, wie man den Konvergenzradius einer Reihe mit Hilfe des Wurzelkriteriums bestimmt, können Sie sich [dieses](#) Video anschauen.
- Man kann den Konvergenzradius auch über ein sogenanntes Quotientenkriterium ausrechnen. Das geht so wie [hier](#) gezeigt.
- Schließlich kann man auch ganz klassisch mal bei [Wikipedia](#) schauen, was ein Konvergenzradius ist.