FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

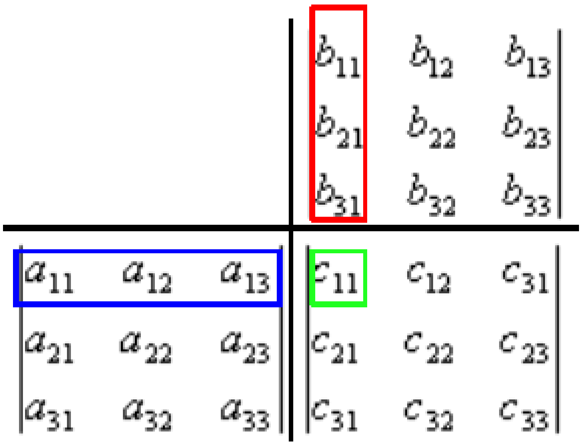
Definitionen-Zettel Nr. 7

Lernziel: Matrixmultiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt.

Die Matrixmultiplikation zweier Matrizen $M_1 \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ und $M_2 \in \mathbb{R}^{(n \times k)}$ ergibt eine Matrix $M_1 M_2 = M_3 \in \mathbb{R}^{(m \times k)}$ wobei das Element $M_3(i,j)$ in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte sich als folgende Summe ergibt:

$$M_3(i,j) = \sum_{l=1}^{n} M_1(i,l) \cdot M_2(l,j)$$

Am besten merkt man sich die Matrixmultiplikation mit dem Falk-Schema:



Aus dem Falk-Schema lässt sich durch Spiegelung des Schemas an der Diagonalen direkt ablesen, dass $(AB)^T = B^T A^T$. Spezielle Matrixprodukte sind die Skalarprodukte, in diesem Fall ist $M_1 \in \mathbb{R}^{(1 \times n)}$ und $M_2 \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$. Es handelt sich also eigentlich um das Produkt zweier Vektoren, das als Ergebnis ein Skalar ergibt. Man schreibt auch für Skalarprodukte $c = a^T b$, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Das spezielle dreidimensionale Vektorprodukt $c = a \times b$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ lässt sich ebenfalls als Matrixprodukt $c = Ab$ schreiben, wobei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$ durch die Komponenten von a folgendermaßen definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix}.$$