FU Berlin: SoSe 2015 (Mathematik 1, Weber)

Potenzreihenansatz

Lernziel: Potenzreihen aus Differentialgleichungen ableiten.

Sinus- und Kosinusfunktionen erfüllen eine Art "Wellengleichung"

$$f''(x) + k^2\, f(x) = 0.$$

Wie kann man solche Gleichungen lösen und dabei direkt die Potenzreihenentwicklung der "Wellenfunktionen" ablesen?

Wir führen das an einem konkreten Beispiel durch:

$$f''(x) + k^2\, f(x) = 0, \qquad x_0 = 0, \qquad f(x_0) = 0, \qquad f'(x_0) = -1$$

Dazu setzt man die Potenzreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)\, x^n$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} n\,(n+1)\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)\, x^n$$

Setzt man diese Entwicklungen in die Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$f''(x) + k^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2}(n+1)(n+2) + k^2 a_n)\, x^n = 0$$

Da diese Gleichung für beliebige x gelten soll, muss jeder Summand Null werden, also:

$$a_{n+2}(n+1)(n+2) + k^2 a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Das ist eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Potenzreihe. Wie beginnt nun die Reihe? Es gilt (wegen Taylor):

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{0!} = f(x_0) = 0 \text{ und } a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} = f'(x_0) = -1.$$

Die restlichen Glieder ergeben sich durch die Rekursionsformel:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{k^2}{2 \cdot 3}, \qquad a_4 = 0, \qquad a_5 = \frac{-k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ldots$$

Oder zusammengefast:

$$a_{2j+1} = \frac{k^{2j}(-1)^{j+1}}{(2j+1)!}.$$

Und damit:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^{2j}(-1)^{j+1}}{(2j+1)!}\, x^{2j+1}.$$