FU Berlin: WiSe 2015/16 (Mathematik 2, Weber)

# Zusatz zu Übungszettel Nr. 5

---

**Lernziele: Projektionsmatrizen ausrechnen**

---

## Projektion eines Vektors auf ein ONS

Ist ein Orthonormalsystem $v_1, \dots, v_n$ von Vektoren gegeben, so kann man gemäß Aufgabe 1 und Aufgabe 3 die Projektion eines beliebigen Vektors auf den von dem ONS aufgespannten Raum bilden:

Ist $f$ ein zu projizierender Vektor, so lautet die Projektion:

$$\Pi f = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle v_i | f \rangle}_{\lambda_i} \cdot v_i.$$

Bei Spaltenvektoren kann man auch schreiben:

$$\Pi f = \sum_{i=1}^{n} (v_i{}^* f)\, v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i (v_i{}^* f) = \sum_{i=1}^{n} (v_i v_i{}^*) f = \left( \sum_{i=1}^{n} v_i v_i{}^* \right) f,$$

wobei also die Projektion durch die Matrix

$$\Pi = \left( \sum_{i=1}^{n} v_i v_i{}^* \right)$$

ausgeführt wird. Erinnerung: $v_i v_i{}^*$ ist das dyadische Produkt (ergibt eine Matrix).

## Projektionsmatrix ausrechnen

Konkret lässt sich so zum Beispiel die Projektionsmatrix für das ONS

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \sqrt{\frac{9}{10}} \cdot \begin{pmatrix} 2/9 \\ -2/9 \\ 1/9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ausrechnen zu:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 3/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 1/5 & 9/10 & 1/10 \\ 1/5 & -1/5 & 1/10 & 9/10 \end{pmatrix}.$$

Projektionsmatrizen haben die Eigenschaft $\Pi^2 = \Pi$. Lässt sich hier nachprüfen...

**Formale Schreibweise für Hilberträume (vollst. Vektorräume mit Skalarprodukt)**

Da man das dyadische als $|v\rangle\langle v|$ schreibt, kann man den Projektionsoperator für Funktionen auch formal schreiben als:

$$\Pi|f\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i\rangle\langle v_i|\right)|f\rangle,$$

was aber konkret ausgerechnet auch nichts anderes bedeutet als (wie gehabt):

$$\Pi f = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i|f\rangle \cdot v_i.$$

Tatsächlich lässt sich der Ausdruck $|f\rangle\langle g|$ aber auch als Rechenvorschrift verstehen, wenn man sich passende Definitionen dafür überlegt, was "$|f\rangle$" und was "$\langle g|$" bedeuten sollen. Zunächst ist $|f\rangle$ einfach die Funktion $f$ selbst. Jetzt soll ja bekanntlich noch der Ausdruck (Skalarprodukt) $\langle g|f\rangle$ bedeuten: $\int_a^b \overline{g(x)} f(x) dx$. Was ist also sinnvollerweise "$\langle g|$"?

$\langle g|$ kann demnach nichts anderes sein als eine (lineare) Abbildung, die jeder Funktion $|f\rangle$ den Wert $\int_a^b \overline{g(x)} f(x) dx$ zuordnet. Jetzt passt wieder alles... $|f\rangle\langle g|$ ist also auch eine Abbildung, wobei das Ergebnis der Abbildung $\langle g|$ noch mit einer Funktion $|f\rangle$ multipliziert wird.

Beispiel:

$$|x^2\rangle\langle 2x| = x^2 \cdot \int_a^b 2x \ \cdot\ \blacksquare\ dx,$$

$|x^2\rangle\langle 2x|$ ist eine lineare Abbildung. Es bildet eine Funktion, die anstelle des ■ einzusetzen ist, wieder auf eine Funktion ab.