Rechenregeln für den Grenzwert von Zahlenfolgen:

Wenn zwei Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren, so konvergiert auch die Summenfolge, die Folge der Produkte und die Differenzen, sowie der Quotient, falls (b_n) keine Nullfolge ist. Für alle diese Verknüpfungen gilt:

$\lim_{n\to\infty} a_n \circ b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) \circ (\lim_{n\to\infty} b_n)$,

wobei der Kringel für Addition, Subtraktion, Produkt oder Quotient stehen kann. Ist (a_n) beschränkt und (b_n) eine Nullfolge, dann ist

$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Kurz gesagt: Man kann in mathematischen Termen die Grenzwerte von den einzelnen "Bausteinen" einsetzen, z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2} + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{-1} + 3} = \frac{0 + \cos(0)}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

Rechenregeln für den Grenzwert von Reihen:

Für Reihen gilt obiges nur noch für Summen und Differenzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mp \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \mp b_n).$$

Für den Quotient gilt es nicht. Für das Produkt gilt das Ausmultiplizieren im Sinne des Distributivgesetzes nur noch für absolut konvergente Reihen.

Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_m \cdot b_n),$$

nur wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Lesen Sie bitte dazu, was eine Doppelsumme ist.