Residuensatz:

Die meisten gebräuchlichen komplexwertigen Funktionen lassen sich durch eine Potenzreihe ausdrücken (die sogenannte Laurent-Reihe):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dabei geht der Index n nicht unbedingt in "beide" Richtungen gegen unendlich.

Ein Beispiel für $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots\right) = z^{-3} - \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z^1}{5!} - \frac{z^3}{7!} \pm \cdots$$

Das Residuum der Funktion f an der Stelle z_0 entspricht dem Vorfaktor vor dem $(z - z_0)^{-1}$ Term, also $res_{z_0} f = a_{-1}$.

In dem obigen Beispiel wäre das: $res_0 \frac{\sin(z)}{z^4} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Oder allgemein kann man das Residuum auch so ausrechnen (wenn f höchstens einen Pol der Ordnung m an der Stelle z_0 hat, sonst existiert der Grenzwert nicht)

$$res_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

wobei $\frac{d^m}{dz^m}$ die m-te Ableitung darstellt.

In dem obigen Beispiel für $m = 4$: $res_0 \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to 0} \frac{d^3}{dz^3}\left(z^4 \frac{\sin(z)}{z^4}\right) = \frac{1}{3!} sin'''(0) = -\frac{1}{3!}$.

So wie a_0 etwas mit der Funktion und a_1 etwas mit der Ableitung der Funktion zu tun hat (das lernen wir bei der Taylor-Reihe), so hat a_{-1} etwas mit dem Integral der Funktion zu tun. Es gilt nämlich (für ein Integral entlang der reellen Achse):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z\, \epsilon \text{"obere Polstellen"}} res_z f.$$

Beispiel : Wir wollen folgendes Integral bilden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$$

Zunächst muss man die Polstellen der Funktion bestimmen, also hier die Nullstellen des Nenners. Diese sind i und $-i$. In der oberen Halbebene liegt nur $z = i$. Also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = 2\pi i\, \boldsymbol{res_i} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(z^2+1)^3}}$$

$$= \pi i \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z^2+1)^3}\right) = \pi i \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left((z-i)^3 \frac{1}{(z-i)^3 (z+i)^3}\right) = \pi i \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$