FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „Skalarprodukt in R²“

Lernziel: Die beiden gelernten Definitionen für das Skalarprodukt sind gleich.

Es gibt zwei verschiedene Definitionen für das Skalarprodukt:

a) algebraisch

$$\mathrm{v}^{\mathrm{T}}\mathrm{w} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_{\mathrm{x}} & \mathrm{v}_{\mathrm{y}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{w}_{\mathrm{x}} \\ \mathrm{w}_{\mathrm{y}} \end{pmatrix} = \mathrm{v}_{\mathrm{x}}\mathrm{w}_{\mathrm{x}} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}}\mathrm{w}_{\mathrm{y}}$$

und

b) geometrisch

$$\mathrm{v}^{\mathrm{T}}\mathrm{w} = |\mathrm{v}||\mathrm{w}| \cos(\sphericalangle \mathrm{v}, \mathrm{w}).$$

Dass diese beiden Definitionen immer die gleichen Werte liefern sollen, ist nicht von vorneherein klar.

Für einen Spezialfall (v auf der x-Achse, w beliebig in der x/y-Ebene) kann diese Gleichheit einfach gezeigt werden, wenn man v und w in Polarkoordinaten schreibt.

Für den Spezialfall stimmen diese beiden Definitionen überein, das haben wir in der Vorlesung nachgerechnet. Was ist aber im Allgemeinfall?

Den Allgemeinfall erhält man, indem man die Vektoren aus dem Spezialfall einer Kongruenzabbildung (Drehung und/oder Spiegelung) unterzieht.

Der Wert des geometrisch definierten Skalarproduktes ändert sich **nicht** bei Kongruenzabbildung der Vektoren, da ja die Winkel und Längen erhalten bleiben.

Anders sieht es wohlmöglich beim algebraisch definierten Skalarprodukt aus. Bei einer Drehung/Spiegelung ändern sich nämlich sehr wohl die x- und y-Koordinaten der Vektoren v,w. Es ist nicht sofort gesagt, dass $\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\mathrm{w}_{\mathrm{x}} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}}\mathrm{w}_{\mathrm{y}}$ dabei konstant bleibt… Bleibt es aber. Das wurde in der Vorlesung dadurch gezeigt, indem wir die Gleichung

$$(Qv)^T(Qw) = v^T w$$

bewiesen haben, wobei Q die darstellende Matrix für eine beliebige Kongruenzabbildung in R² ist.

FAZIT: In R² stimmen die beiden Definitionen für das Skalarprodukt überein.