FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „Dimensionen-Theorem“

Lernziel: Ein Lemma, einige Sätze und ein wichtiges Theorem zu dem Thema „Basis eines Vektorraumes“.

Lemma: (äquivalente Formulierung von „linear abhängig“) Für Vektoren $a_1, \dots, a_n$ eines K-Vektorraums V ist äquivalent:

(i) $a_1, \dots, a_n$ sind linear abhängig.
(ii) Einer der Vektoren $a_1, \dots, a_n$ ist eine Linearkombination der restlichen, d.h. es existiert ein $m \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_m \in span(a_1, \dots, a_{m-1}, a_{m+1}, \dots, a_n)$.
(iii) Es existiert ein $m \in \{1, \dots, n\}$ mit $span(a_1, \dots, a_n) = span(a_1, \dots, a_{m-1}, a_{m+1}, \dots, a_n)$.

Sind die Vektoren $a_1, \dots, a_r$ für ein $r < n$ linear unabhängig, so folgen aus (i) die Bedingungen für (ii) und (iii) bereits für ein $m \in \{r+1, \dots, n\}$.

Satz: (Endlich erzeugte VR) Jeder K-Vektorraum, der ein endliches Erzeugendensystem besitzt, besitzt auch eine Basis. Jede solche Basis ist in diesem Fall auch endlich.

Satz: (äquivalente Formulierung von „Basis“) Es sei V ein K-Vektorraum und $a_1, \dots, a_n$ ein System von Vektoren aus V. Dann ist äquivalent:

(i) $a_1, \dots, a_n$ bilden eine Basis von V.
(ii) $a_1, \dots, a_n$ ist ein maximales linear unabhängiges System in V.
(iii) $a_1, \dots, a_n$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

Satz: (Basisergänzungssatz) In einem K-Vektorraum V betrachte man ein linear unabhängiges System $a_1, \dots, a_n$ sowie ein Erzeugendensystem $b_1, \dots, b_m$. Dann lässt sich das System der a_i durch Elemente des Systems der b_i zu einer Basis von V ergänzen.

Theorem: (Dimensionen-Theorem) In einem K-Vektorraum V mögen die Elemente $a_1, \dots, a_n$ eine Basis sowie die Elemente $b_1, \dots, b_m$ ein Erzeugendensystem bilden. Dann gilt $n \leq m$. Weiter ist $b_1, \dots, b_m$ genau dann eine Basis, wenn n=m gilt. Je zwei Basen eines endlichen K-Vektorraums V bestehen folglich aus gleichviel Elementen.

Korollar 1: Es sei V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist äquivalent:
(i) $\dim V = n$.
(ii) Es existiert in V ein linear unabhängiges System von n Vektoren und jeweils $n+1$ Vektoren sind linear abhängig.

Korollar 2: Es sei V ein endlicher K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist äquivalent:
(i) $\dim V \geq n$.
(ii) Es existiert in V ein linear unabhängiges System von n Vektoren.