Lösungen zum 1. Aufgabenblatt

Die Lösungen wurden erstellt von: Isabel Voigt und Matthias Rehder

Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematiwelt.com aufrufbar. Insgesamt 1961 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4a		∑
Erreichte Punkte:						

Kurze Wiederholung: [Relationen und Abbildungen]

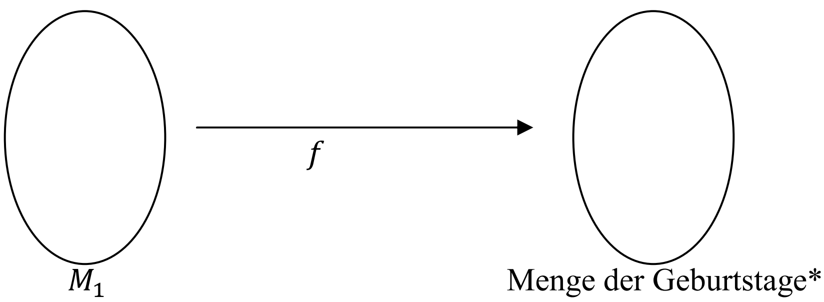
1.0 Definition [**Relation**]
Seien X und Y zwei nicht leere Mangen. Eine Relation von X zu Y ist eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. Dabei steht $x \in X$ in R-Relation zu $y \in Y$, wenn $(x, y) \in R$ gilt, in Zeichen $x\,Ry$. Falls $X = Y$, so heißt R eine Relation auf X.

2.0 Definition [**Abbildung**]
Eine Relation R zwischen X und Y heißt Abbildung f von X in sich oder nach Y, wenn die folgenden beiden Eigenschaften gelten:
(i) Es gilt der vertikale Linientest, das heißt zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$.
(ii) Es gilt die Rechtseindeutigkeit, das heißt aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt stets $y = z$.

Aufgabe 1.1:

Notation: Wir setzten dazu M_1 ≔ Menge der Menschen, M_2 ≔ Tage des Jahres, $M_3 \coloneqq \mathbb{N}$, M_4 ≔Wochentage, $M_5 \coloneqq \mathbb{Q}$, M_6 ≔Menge der Städte,

a. Jedem Menschen wird sein Geburtstag zugeordnet.

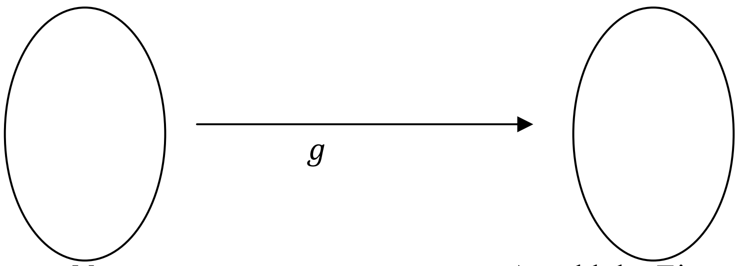


Der Definitionsbereich der Relation ist die Menge der Menschen. Es handelt sich bei f um eine Abbildung, denn wir gehen davon aus, dass jeder Mensch nur einen Geburtstag hat. Im Grenzfall (Geburt gegen 24.00 Uhr) wird nämlich von Amtswegen nur ein Geburtstag festgelegt. In mathematischer Notation steht da: $\forall x \in M_1\ \exists!\, y \in \{\text{Menge aller Geburtstage}\}$.

Hinweis zu den Wertebereichen: Da für die Wahl der Wertebereiche in der Aufgabenstellung keine genaueren Vorgaben galten, wurden diese entsprechend der eigenen Vorstellungen definiert.

Es gibt Menschen, die am selben Tag Geburtstag haben. Beweis: Der Russische Skirennläufer Juri Danilotschkin hat (genau wich ich) am 22. Februar seinen Geburtstag. Demzufolge ist unsere Abbildung schon mal nicht injektiv. Versteht man unter der Menge (*) der Geburtstage eine Angabe des Tages und des Monats (ohne Jahresangabe, z. B. 01. Mai) dann handelt es sich bei unserer Abbildung ganz offensichtlich um eine surjektive Funktion, denn jedes Element der Zielmenge wird dann mindestens einmal getroffen. Es gibt also kein Element der Menge der Geburtstage, an dem keiner Geburtstag hat. Falls man die Menge der Geburtstage jedoch anders definieren würde, dann wäre auch eine andere Argumentation durchaus möglich. Wegen der fehlenden Injektivität ist die Abbildung nicht bijektiv.

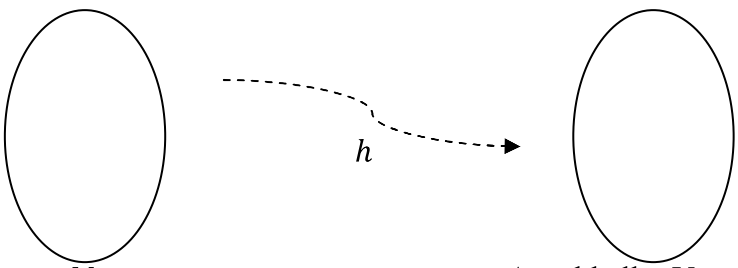
b. Jeder Stadt wird die Anzahl der Einwohner zugeordnet.



M_6 Anzahl der Einwohner

Der Definitionsbereich der oben dargestellten Relation g ist die Menge der Städte. Weil wir davon ausgehen können, dass jede Stadt nur eine spezielle Anzahl an Einwohnern zugeordnet werden kann (und nicht Hamburg hat 1 707 986 und 3 000 258 Einwohner) und dass immer eine Zuordnung existiert (nehmen wir mal die Städte heraus, die noch keine statistische Einwohnerzählung durchgeführt haben) handelt es sich bei der Relation g um eine Funktion. Diese ist nicht injektiv, denn es existieren bestimmt zwei Städte mit der gleichen Anzahl an Bewohnern. Wenn wir die Wertemenge, also die Anzahl der Einwohner so definieren, dass sie tatsächlich nur die in der Realität auftretenden Einwohneranzahlen beinhaltet (also keine Lücken oder Einwohneranzahlen, die nicht einer Stadt zugeordnet werden können), dann handelt es sich um eine surjektive Abbildung, denn jedes Element der Bildmenge (Anzahl der Einwohner) wird auch getroffen. Bijektiv ist die Abbildung wegen der fehlenden Injektivität nicht.

c. Jedem Menschen werden alle Verwandten zugeordnet.

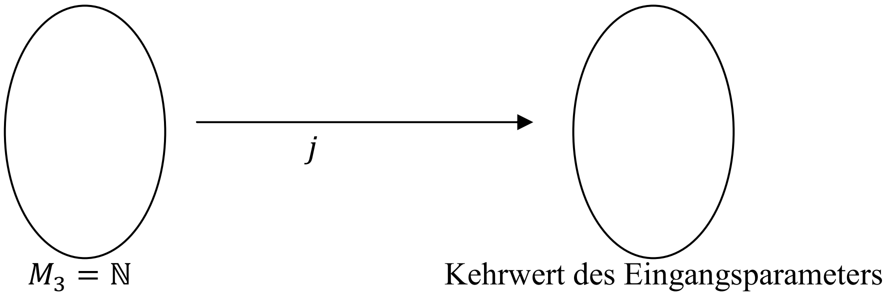


M_1 Anzahl aller Verwandten

Der Definitionsbereich der Relation h ist die Menge der Menschen. Weil nicht jeder Mensch Verwandte hat (Eltern zählen hier nicht dazu), kann nicht jedem Element aus M_1 ein passendes

Element aus der Menge aller Verwandten zugeordnet werden, demnach handelt es sich um gar keine Abbildung.

d. Jeder Zahl $x \in \mathbb{N}$ mit $x \neq 0$ wird ihr Kehrwert $\frac{1}{x}$ zugeordnet.



Der Definitionsbereich unser Relation j ist die Menge der natürlichen Zahlen, wobei wir hier (für immer) die Null nicht als ein Element dieser Menge ansehen. Weil jedem Element unseres Definitionsbereichs auch ein entsprechendes Element des Wertebereichs zugeordnet werden kann, handelt es sich bei j um eine Abbildung. Diese Abbildung ist injektiv, denn sie ordnet jedem Element der Definitionsmenge genau einen Kehrwert zu. Bei der Untersuchung auf Surjektivität wird es wieder kniffliger. Setzen wir den Wertebereich als die folgende abzählbare Lebesgue messbare Nullmenge $W := \left\{x : x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x := \frac{1}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$, dann wird jedes Element der Wertemenge genau einmal getroffen, denn es gilt u.a. $0 \notin W$. Somit wäre unsere Abbildung j unter der eben getroffenen Annahme ebenfalls surjektiv. Surjektivität und Injektivität implizieren zusammen die Bijektivität unser Abbildung j. Natürlich könnte man als Wertebereich auch andere Mengen setzen, welche die Null enthalten, dann wäre unsere Abbildung aber weder surjektiv noch bijektiv.

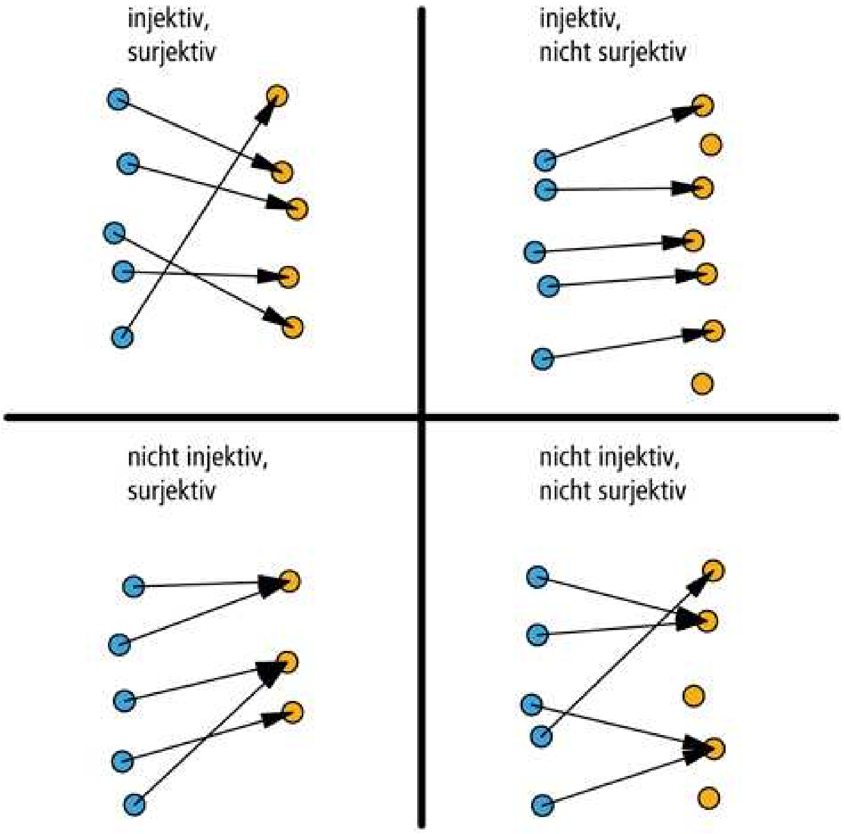


Abbildung 2.18 Illustration der Eigenschaften *injektiv* und *surjektiv*. Nur die Abbildung links oben ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

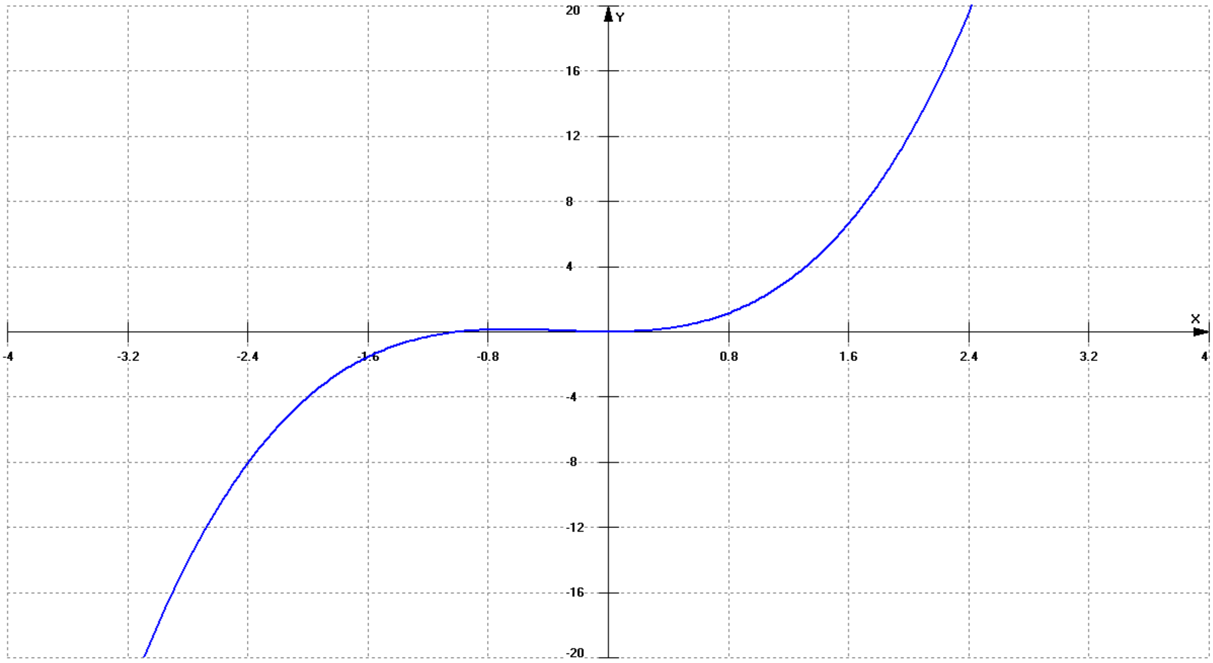
Aufgabe 1.2:

Wir werden hier die beiden Abbildungen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) := x^3 + x^2$ und $f_2 : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) := x^3 + x^2$ betrachten.

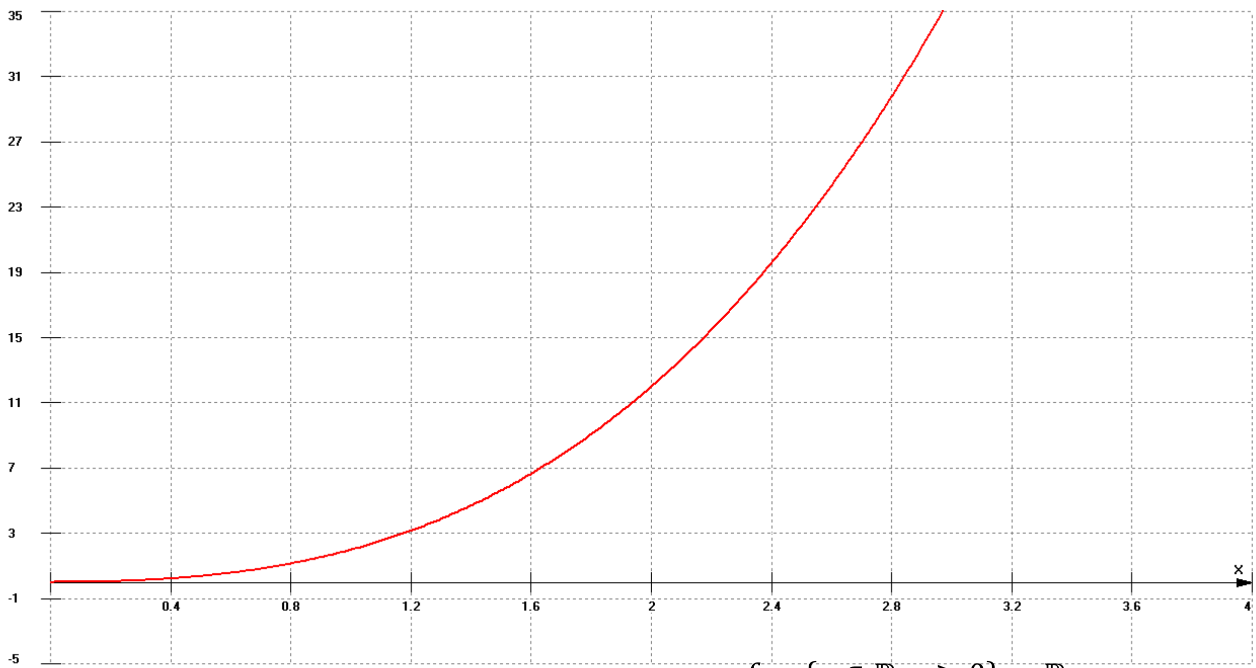
Folgende Aufgaben sind zu bearbeiten:

1. Sind die Abbildungen surjektiv, injektiv, bijektiv?
2. Was sind die Bilder von f_1 und f_2? Was sind die Urbilder von 0?

Bevor wir loslegen, skizzieren wir die beiden Funktionen und verwenden diese Graphiken dann als Ausgangspunkt.



$f_1(x) := x^3 + x^2$



$f_2 : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \to \mathbb{R}$

Die Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) := x^3 + x^2$ ist nicht injektiv, denn für $x = 0$ existieren zwei Urbilder, weil die Funktion zwei Nullstellen hat. Es gilt also $0 \in \mathbb{R}$ und $|f^{-1}\{0\}| \notin \{0, 1\}$. Die Nullstellen von f lauten übrigens -1 und 0. (Im Anhang befindet sich hierzu ein Beweis.) Jedes Element der Zielmenge $c \in \mathbb{R}$ wird mindestens einmal getroffen. Dementsprechend hat jedes Element mindestens ein Urbild, es gilt also: $|f^{-1}(c)| \geq 1 \; \forall c \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine surjektive Abbildung. Einen abstrakteren Beweis hierfür führen wir im Anhang vor. Das Bild von f_1 ist ganz $\mathbb{R}$. Das Urbild von 0 ist -1 und 0. Diese Abbildung ist nicht bijektiv.

Die Abbildung $f_2 : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) := x^3 + x^2$ ist streng monoton steigend und damit auch injektiv, denn für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert höchstens ein $u \in \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ sodass $f(u) = a$, es gilt also $|f^{-1}(a)| \in \{0, 1\} \; \forall a \in \mathbb{R}$. Surjektiv ist diese Abbildung nicht, denn zu $-3 \in \mathbb{R}$ existiert kein Urbild. Es gilt also $\exists a \in \mathbb{R} : \; |f^{-1}(a)| < 1$. Die Abbildung ist demzufolge auch nicht bijektiv. Das Bild von f_2 ist ganz $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$. Das Urbild von 0 ist dann nur die 0: $\left(f^{-1}(\{0\})\right) = 0$. Bei $f_3 : \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ mit $f_3(x) := x^3 + x^2$ würde es sich um eine bijektive Abbildung handeln, denn jedes Element der Zielmenge hat genau ein Urbild.

***Anhang Nr. 1**:
Wir wollen hier die Surjektivität für $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) := x^3 + x^2$ nachweisen. Wir müssen also folgendes zeigen: Es gilt $|f^{-1}(b)| \geq 1 \;\; \forall b \in \mathbb{R}$, das heißt es ist zu zeigen, dass jedes Element aus dem Zielbereich $\mathbb{R}$ mindestens ein Urbild besitzt.
<u>Feststellung</u>: Unsere Funktion darf also keine Lücken haben.
<u>Definition</u>: [Lücke] Sei B ein Banachraum und sei $\bar{f} : D \to Z$ mit $D, Z \subset B$ eine Abbildung. Unter einer Lücke der Abbildung $\bar{f}$ verstehen wir dann die Existenz eines $b \in Z$ mit der Eigenschaft $|f^{-1}(b)| = 0$, wobei f^{-1} das Urbild von $\bar{f}$ bezeichnet.
Zum Nachweis der Vollständigkeit behaupten wir nun, dass $\bar{f}$ keine Lücken hat und werden die beweisen.
<u>Beweis</u>: Eine Funktion f_1 hat genau dann keine Lücken in $a \in \mathbb{R}$, wenn durch eine geringe Abweichung vom a −Wert auch nur eine geringe Abweichung vom $f_1(a)$ −Wert folgt. Dabei ist die exakte Bedeutung von „gering" hier wohl eine offene Interpretationsfrage. Wir zeigen dazu die Erfüllung des Kriteriums von Augustin Louis Cauchy.
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : \; (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$ Wir unterteilen die Summenfunktion in zwei Teile:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ im Punkt $a \in \mathbb{R}$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $|x - a| < \delta$:
Abschätzung: $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a||x + a| < \delta|x + a|\delta \cdot |x + a| < \delta \cdot \left(\frac{a}{2} + a\right) = \frac{3}{2}\delta \cdot a$ Falls nun also $\frac{3}{2}\delta \cdot a \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{2\varepsilon}{3 \cdot a}$ sei, dann wählt man $\delta := \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{2\varepsilon}{3 \cdot a}\right\}$. Somit folgt die Abschätzung $|f(x) - f(a)| < \frac{3}{2}\delta \cdot a \leq \varepsilon$. Also hat f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ keine Lücken.
Ähnlich zeigt man, dass der zweite teil der Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls keine Lücken hat. Wir finden hier ein δ mit $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{K}\right\}$ und $K := \left\{3|a|^2 + \frac{3}{2}|a| + \frac{1}{4}\right\}$.
<u>Hilfslemma</u>: Seien $h : D \to Z$ und $w : D \to Z$ zwei Abbildungen ohne Löcher, dann hat auch die Summenfunktion $f : D \to Z$ mit $f := h + w$ keine Lücken. (der Beweis hierfür ist trivial)
Zusammen haben wir nun also nachgewiesen, dass jedes Element aus dem Zielbereich $\mathbb{R}$ unserer Abbildung f_1 mindestens ein Urbild besitzt und damit surjektiv ist.

***Anhang Nr. 2**:
$f_1(x) = x^3 + x^2$

Sei nun $f_1(x) = 0$, dann folgt: $0 = x^3 + x^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Distributivgesetz}} x^2(1 + x) = 0 \quad (1)$

1 liefert die doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$, denn das Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren 0 ist. Der zweite Faktor $1 + x$ ist genau dann Null, wenn $x_3 = -1$ ist. Damit haben wir unsere Nullstellen verifiziert.

Aufgabe 1.3: [Logik]

1) Wir haben hier die folgenden Verknüpfungstafeln auszufüllen.

a. $(A \vee B) \Rightarrow \bar{C}$

A	B	C	$\bar{C}$	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow \bar{C}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0

b. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{C} \Rightarrow A)$

A	B	C	$\bar{C}$	$(A \Rightarrow B)$	$(\bar{C} \Rightarrow A)$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{C} \Rightarrow A)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

2) Wir wollen die Äquivalenz mit einer Verknüpfungstabelle zeigen.

$$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

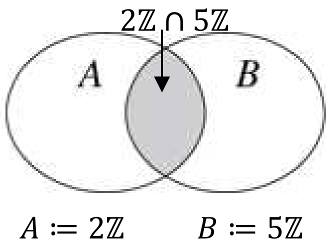
A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$	$(\bar{A} \wedge \bar{B})$	$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B})$
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

In der letzten Spalte stehen ausschließlich Einsen („wahr“) Die Regel von De Morgan ist damit komplett bewiesen.

Aufgabe Ü4a: [Einführungen in die Mengenlehre]

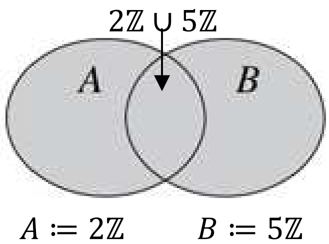
Wir betrachten die beiden Mengen $2\mathbb{Z} = \{2k,\ k \in \mathbb{Z}\},\quad 5\mathbb{Z} = \{5k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Zuerst bestimmen wir die Schnittmenge: $2\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = \{10k,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$



Jetzt bestimmen wir die Vereinigungsmenge: $2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z} = \{t, \quad$ für $t \in \mathbb{Z}$ und $t \in \mathrm{T}(2,5)\}$

Dabei bezeichnet $\mathrm{T}(2,5)$ die Menge der durch 2 oder 5 teilbaren Zahlen.



Nun definieren wir zwei injektive Abbildungen:

$f_1 : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f_1(x) \coloneqq x$. Hier wird jedes $b \in \mathbb{Z}$ höchstens einmal von $a \in 5\mathbb{Z}$ getroffen.

$f_2 : \mathbb{Z} \to 5\mathbb{Z}$ mit $f_2(x) \coloneqq 5x$. Hier wird jedes $b \in 5\mathbb{Z}$ auch höchstens einmal von $a \in \mathbb{Z}$ getroffen.

Aufgabe Ü4b: [Didaktik, der Mordfall]

Nach einem Mordfall gibt es drei Verdächtige, A, B und C, von denen zumindest einer der Täter sein muss. Nachdem sie und die Zeugen getrennt vernommen wurden, kennen die überforderten Ermittler folgende Fakten.

(i) Wenn A der Täter ist, dann müssen B oder C ebenfalls Täter sein.
(ii) Wenn B Täter ist, dann ist A unschuldig.
(iii) Wenn C Täter ist, dann ist auch B Täter.

Wer war der Täter oder die Täter?

🗁 Lösungsansatz:

Angenommen A ist schuldig, dann folgt daraus, dass B ebenfalls schuldig ist, entweder direkt oder als Mittäter von C. Die Schuld von B impliziert aber die Unschuld von A, das heißt der Fall liefert einen Widerspruch.

Demnach ist A auf jeden Fall unschuldig. Nun nehmen wir an, B sei ebenfalls unschuldig. Da mindestens einer der drei schuldig sein muss, muss dann C ein Täter sein. Damit ist aber B aber Mittäter und die Annahme, B sei unschuldig wurde auf einen Widerspruch geführt.

B ist also auf jeden Fall schuldig – entweder direkt oder als Mittäter von C. Ob C aber schuldig ist, lässt sich mit diesen Mitteln nicht feststellen.

Alternativ zur obigen Argumentation kann man auch den aussagenlogischen Ausdruck $\big(A \Rightarrow (B \vee C)\big) \wedge (B \Rightarrow \bar{A}) \wedge (C \Rightarrow B)$ soweit wie möglich vereinfachen und daraus die Lösung ablesen.

Kompetenzen: Man erlernt das logische Schließen von Zusammenhängen und kann dadurch komplizierte Fälle lösen. Leicht erkennt man dabei das Grundprinzip der Logik: In der Logik, ja generell bei der Formulierung mathematischer Sachverhalte, müssen alle verwendeten Ausdrücke eine klare, scharf definierte Bedeutung haben. Diese harte Handhabung steht im klaren Gegensatz zur Alltagssprache, in der viele Dinge absichtlich oder unabsichtlich mehrdeutig sind und wo man sich hinterher oft mit „aber das hatte ich doch ganz anders gemeint …“ aus der Affäre ziehen kann. Gerade das wollen wir hier eben nicht zulassen, bei jedem Satz sollen sowohl Voraussetzungen als auch Aussagen klar und präzise sein. Dies hat natürlich auch weitreichende Konsequenzen. So darf man bei einem derartigen mathematischen Satz üblicherweise kein einziges Wort weggelassen, dazunehmen oder verändern. Insbesondere der Versuchung, die Voraussetzungen verkürzt, und damit fast immer verfälscht, zu formulieren oder gar wegzulassen, muss man des Öfteren verstehen.