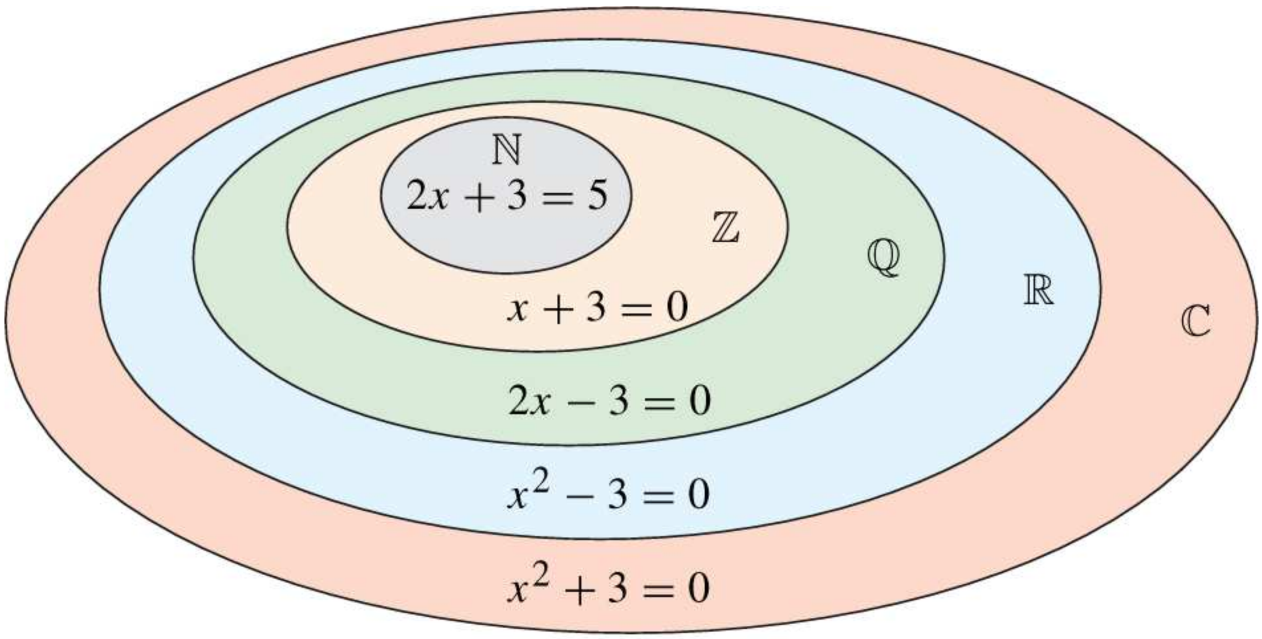
Lösungen zum 2. Aufgabenblatt

Onlineversion, es werden keine Namen angezeigt.

Hinweis: Eine Liste der zur Bearbeitung verwendeten Literatur ist unter www.mathematiwelt.com aufrufbar. Insgesamt 3255 Wörter

Aufgaben Nr.	Ü1	Ü2	Ü3	Ü4	Ü5a		$\sum$
Erreichte Punkte:							



Definition [Gruppe]

Es ist $(G, \smiley)$ eine Gruppe, falls folgende Axiome gelten:

G1: Assoziativgesetz:

$\forall x, y, z \in G$ gilt $(x \smiley y) \smiley z = x \smiley (y \smiley z)$

G2: Neutrales Element:

$\exists!\, 0 \in G$ mit $0 \smiley x = x \smiley 0 = x \quad \forall x \in G$

G3: Inverse Elemente:

$\forall x \in G\ \exists!$ inverses Element $y \in G$ mit $x \smiley y = y \smiley x = 0$

Die Gruppe G heißt kommutativ bzw. abelsch, wenn zusätzlich (G4) gilt:

G4: Kommutativgesetz:

Für alle $x, y \in G$ gilt: $x \smiley y = y \smiley x$

Definition [Untergruppe]

Es ist $U \subset G$ eine Untergruppe von G, falls gilt:

1. Es existiert ein neutrales Element $e \in U$ (es ist dasselbe wie in der Gruppe G)
2. $a, b \in U \Rightarrow a$ ☺ $b \in U$ (Abgeschlossenheit)
3. $a \in U \Rightarrow$ das inverse Element ist ebenfalls $\in U$

Definition [Körper]

Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit den Rechenoperationen

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a, b) \longmapsto a + b$$

und

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, (a, b) \longmapsto a \cdot b$$

Heißt Körper, wenn die folgenden Rechenregeln (Körperaxiome) erfüllt sind:

a) $\mathbb{K}$ ist bezüglich $+$ und $\cdot$ eine abelsche Gruppe.

b) Es gilt das Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt: $a(b + c) = ab + ac$

Definition [Monoid]

Eine Menge M mit einer assoziativen Verknüpfung $\cdot$ heißt Monoid, wenn es ein Neutralelement e gibt, d.h. $a \cdot e = e \cdot a = a \ \ \forall a \in M$.

Folgerungslemma: (Beweis trivial)

(i) Jede Gruppe und jeder Ring ist ein Monoid.

(ii) Es sind $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, \cdot)$ und $(\mathbb{N}_0, +)$ Monoide.

Definition [Ring, Schiefkörper]

Ein Ring ist eine Menge R mit zwei inneren Verknüpfungen " $+$ " und " $\cdot$ " mit den Eigenschaften

(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(R2) Die Verknüpfung " $\cdot$ " ist assoziativ.

(R3) Es gelten die Distributivgesetze.

d.h. $\forall a, b, c \in R$ gilt: $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$

Besitzt R außerdem ein Einselement bezüglich der Multiplikation, so nennt man R einen Ring mit Eins. Konvention: Wo nicht ausdrücklich anders gesagt, verstehen wir unter einem Ring ein Ring mit Eins. Ein **Schiefkörper** S ist ein Ring mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $(S^*, \cdot) = (S\backslash\{0\}, \cdot)$ eine multiplikative Gruppe bildet, zusätzlich zu den Eigenschaften R1, R2 und R3 gilt für S also noch, dass zu jedem $a \in S^*$ ein inverses Element a^{-1} existiert, sodass gilt $a^{-1} \cdot a = 1$. Ein Körper K ist kein Schiefkörper mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die multiplikative Gruppe $(K^*, \cdot)$ kommutativ ist.

Definition [Homorphismus, isomorphe Gruppen]

Eine Abbildung $F : G \to H$ heißt Homorphismus, wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $F(a * b) = F(a) \diamond F(b)$. Die anderen vier Begriffe beschreiben spezielle Homomorphismen. Ein Homomorphismus F heißt

(a) Monomorphismus, falls F injektiv ist,

(b) Epimorphismus, falls F surjektiv ist,

(c) Isomorphismus, falls F bijektiv ist,

(d) Endomorphismus, falls F ein Homomorphismus von G in sich selbst ist,

(e) Automorphismus, falls F ein Isomorphismus von G in sich selbst.

Zwei Gruppen G und H heißen isomorph, geschrieben $G \simeq H$, wenn es einen Isomorphismus von G nach H gibt.

Aufgabe 1: [Logik, Ringbeweis]

A. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
B. Jedes Tier, das gern in den Mond guckt, ist als Schoßtier geeignet.
C. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Wege.
D. Nur Tiere, die nachts umherschweifen, sind Fleischfresser.
E. Jede Katze tötet Mause
F. Nur die Tiere in diesem Haus mögen mich leiden.
G. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet
H. Nur Fleischfresser töten Mause
I. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht leiden können.
J. Tiere, die nachts umherschweifen, gucken gerne in den Mond.

<u>Aufgabe</u>: Folgern Sie hieraus: Ich gehe Kängurus aus dem Weg.
Dazu fertigen wir einen Ringbeweis an und implizieren nacheinander die Aussagen. Die Buchstaben A, B, C, D, E, … stehen hierbei für die jeweils (dahinterstehenden) definierten Aussagen.
Ringbeweis:
A ∧ E ⇒ K Alle Tiere in diesem Haus töten Mäuse.
$H \wedge K \Rightarrow L$ Katzen sind Fleischfresser.
$L \wedge A \Rightarrow M$ Alle Tiere des Hauses sind Fleischfresser.
$M \wedge D \Rightarrow N$ Alle Tiere des Hauses schweifen nachts umher.
$N \wedge J \Rightarrow O$ Alle Tiere des Hauses gucken gerne in den Mond.
$O \wedge B \Rightarrow P$ Tiere des Hauses sind als Schoßtiere geeignet.
$G \wedge B \Rightarrow Q$ Kängurus gucken nicht gerne in den Mond.
$Q \wedge J \Rightarrow R$ Kängurus schweifen nachts nicht gerne umher.
$R \wedge D \Rightarrow S$ Kängurus sind keine Fleischfresser.
$S \wedge H \Rightarrow T$ Kängurus töten keine Mäuse.
$(T \wedge K) \vee (S \wedge M) \vee (R \wedge N) \vee (Q \wedge O) \Rightarrow U$ Kängurus sind keine Tiere des Hauses.

> **<u>Hinweis</u>**: Die Klammersetzung in obiger Notation hätte auch weggelassen werden können, denn die Klammern dienen ausschließlich der Übersichtlichkeit. Offensichtlich hätte auch nur eine der vier mit „oder" verknüpften Aussagen ausgereicht. Dadurch hätte man unseren Beweis auch abkürzen können, wir wollten aber trotzdem mal viele der möglichen Implikationen aufschreiben.

$U \wedge F \Rightarrow V$ Kängurus können mich nicht leiden.
$V \wedge I \Rightarrow W$ Ich verabscheue Kängurus.
$W \wedge C \Rightarrow X$ **<u>Ich gehe Kängurus aus dem Weg</u>**. ♡
Damit haben wir unsere gewünschte Aussage und sind fertig.

Aufgabe 2: [Quantorenreihenfolge]

Folgende Aussagen seien gegeben:

(a) $\exists x \in \mathbb{Z} \mid \forall y \in \mathbb{Z}\ \ y + x = 0$

(b) $\forall y \in \mathbb{Z}\ \ \exists x \in \mathbb{Z} \mid y + x = 0$

Bei der Aussage in (a) wird dich tatsächlich behauptet, dass für ein bestimmtes $x \in \mathbb{Z}$ für alle beliebigen ganzzahligen y die Gleichung $x\ +\ y\ =\ 0$ gelten soll. Anschaulich soll also folgendes gelten: Wir wählen uns frei irgendein ganzzahliges x und halten dies dann fest (Existenzquantor) dann können wir jedes beliebiges ganzzahliges y addieren und erhalten als Resultat der Summe 0. Diese Aussage widerlegen wir, indem wir ein passendes Gegenbeispiel finden:
Beweis: Angenommen es gelte Aussage (a), dann wählen wir uns mit C als geradlinige Verbindung der beiden Punkte $A(1,0)$ und $B(2,1)$:

$$x = 10 + \int_C \frac{x\,dx - y\,dy}{(x-y)^2} = 11$$

Die Lösung des Kurvenintegrals $\int_C \frac{x\,dx - y\,dy}{(x-y)^2}$ beträgt 1 und dies ist leicht mit Mitteln der Analysis III nachweisbar. Man hätte das Integral auch weglassen können und direkt mit der 1 als Wert rechnen können, aber an dieser Stelle wollten wir nur noch mal verdeutlichen, dass auch Integrale nur für einen Zahlenwert stehen, falls das Integral nicht divergiert.

Nun sei unser $y \in \mathbb{Z}$ ganz beliebig gewählt, dann gilt die Gleichung $y + x = 0$ für $y = -x$, aber weil unser y ja beliebig wählbar war, setzen wir einfach mal $y = 47$. Setzen wir dies in die Gleichung ein, dann erhalten wir mit $47 + 11 = 0$ einen Widerspruch zur Behauptung. † Demzufolge ist (a) eine falsche Aussage.

Wir wollen nun die Gültigkeit der Aussage (b) beweisen und führen dazu erneut einen Reductio ad absurdum – Beweis, wir nehmen also die negierte Aussage (alle Quantoren drehen sich um und die Aussage wird negiert) an und folgern daraus einen Widerspruch.

Behauptung: $\exists y \in \mathbb{Z}\ \ \forall x \in \mathbb{Z} \mid y + x \neq 0$
Beweis**:** Wir formen zuerst $y + x \neq 0$ äquivalent um

$$y + x \neq 0 \ \mid -x$$
$$\Leftrightarrow y \neq -x$$

Nun sei also $x \in \mathbb{Z}$ ganz beliebig, dann suchen wir die Existenz einer ganzzahligen Nummer y sodass $y = -x$. Nehmen wir uns zum Beispiel $y = 5$, naja, dann sagt uns das x „Ätschi Bätsch, ich bin ja beliebig und nun bin ich eben mal die -5“ und schon ist die Aussage falsch. Ein weiterer Versuch, wir nehmen einfach mal die Zahl $1 + \sum_{n=1}^{10^9} n!$. Diese Zahl ist zwar ziemlich groß und ganzzahlig, denn alle Fakultäten sind hier ganzzahlig und deren Summe dann wohl auch, trotzdem ist dann unser x sehr schnell und sagt uns: „Ätschi Bätsch, ich bin ja immer noch beliebig und nun bin ich eben mal die $-1 + \sum_{n=1}^{10^9} n!$" und schon ist unsere Aussage erneut falsch. Diese Beobachtungen lassen uns denn Entschluss vermuten, dass die Behauptung wohl falsch ist, aber wie zeigen wir das? Wir sind ja keine Physiker, die sich mir Beobachtungen schon zufrieden stellen, also setzen wir o. B. d. A.* $x = -y$. Dieses (* o. B. d. A. gilt hier, weil unser x ja immer noch beliebig wählbar ist, demzufolge kann es also auch $-y$ sein.) Mit dieser Deklaration steht da $y = y \neq -x = y$ und dies ist offensichtlich ein Widerspruch. † Damit ist die Gültigkeit unserer Aussage (b) vollständig nachgewiesen. ■

Fazit: Der Unterschied der beiden Aussagen liegt in der Vertauschung der Quantorenreihenfolge und der daraus resultierenden unterschiedlichen Wahrheitswerte der beiden Aussagen.

Aufgabe 3: [Minimalkörper]

Wir wollen hier beweisen, dass die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\dot\vee$ als Addition und $\wedge$ als Multiplikation einen Körper bilden.

Der kleinste Körper ist tatsächlich der Körper mit den zwei Elementen 0 und 1. Wir bezeichnen ihn mit {Ж,$\dot\vee$,$\wedge$}, dabei sind die Addition und Multiplikation wie folgt erklärt:

$\dot\vee$	0	1
0	0	1
1	1	0

Mit den Verknüpfungstabellen können wir einige Körperaxiome nachweisen:

<u>Assoziativität</u>: $1 \dot\vee (1 \dot\vee 1) = 1 = (1 \dot\vee 1) \dot\vee 1$

$0 \dot\vee (1 \dot\vee 1) = 0 = (0 \dot\vee 1) \dot\vee 1$

$1 \dot\vee (0 \dot\vee 1) = 0 = (1 \dot\vee 0) \dot\vee 1$

$1 \dot\vee (1 \dot\vee 0) = 0 = (1 \dot\vee 1) \dot\vee 0$

$0 \dot\vee (0 \dot\vee 1) = 1 = (0 \dot\vee 0) \dot\vee 1$

$1 \dot\vee (0 \dot\vee 0) = 1 = (1 \dot\vee 0) \dot\vee 0$

$0 \dot\vee (1 \dot\vee 0) = 1 = (0 \dot\vee 1) \dot\vee 0$

$0 \dot\vee (0 \dot\vee 0) = 0 = (0 \dot\vee 0) \dot\vee 0$ ♡

Kommutativität: offensichtlich, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale.
Neutrales Element: 0
Inverses Element: Kann man jeweils leicht aus der Verknüpfungstabelle ablesen.
(Beispiel: Zu 1 ist das additive Inverse die 1, denn $1 \dot{\vee} 1 = 0$)

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Mit den Verknüpfungstabellen können wir einige Körperaxiome nachweisen:
Assoziativität: $1 \wedge (1 \wedge 1) = 1 = (1 \wedge 1) \wedge 1$
$0 \wedge (1 \wedge 1) = 0 = (0 \wedge 1) \wedge 1$
$1 \wedge (0 \wedge 1) = 0 = (1 \wedge 0) \wedge 1$
$1 \wedge (1 \wedge 0) = 0 = (1 \wedge 1) \wedge 0$
$0 \wedge (0 \wedge 1) = 0 = (0 \wedge 0) \wedge 1$
$1 \wedge (0 \wedge 0) = 0 = (1 \wedge 0) \wedge 0$
$0 \wedge (1 \wedge 0) = 0 = (0 \wedge 1) \wedge 0$
$0 \wedge (0 \wedge 0) = 0 = (0 \wedge 0) \wedge 0$ ♡
Kommutativität: offensichtlich, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale.
Neutrales Element: 1
Inverses Element: Kann man jeweils leicht aus der Verknüpfungstabelle ablesen.
(Beispiel: Zu 1 ist das multiplikative Inverse die 0, denn $1 \wedge 0 = 0$)
Distributivität: Leicht sichtbar gilt z.B.: $1 \wedge (1 \dot{\vee} 1) = 1 \wedge 1 \dot{\vee} 1 \wedge 1 = 0$ ♡
$1 = 1 \wedge (0 \dot{\vee} 1) = 1 \wedge 0 \dot{\vee} 1 \wedge 1 = 1$
Die Einträge sollten dabei klar sein. Was verbirgt sich aber hinter der Addition $1 \dot{\vee} 1 = 0$. Daran könnte man hängen bleiben. Hat man damals in der 1. Klasse nicht noch gelernt, dass $1 \dot{\vee} 1 = 2$? Das stimmt schon, aber in diesem Körper reduzieren wir modulo 2 und betrachten also nur die Reste und wenn man $1 \dot{\vee} 1 = 2$ durch 2 dividiert, erhält man den Rest 0. Deshalb steht an dieser Stelle keine 2, sondern einfach nur eine 0. Zur Vereinfachung stellen wir uns die Null als eine gerade Zahl und die Eins als eine ungerade Zahl vor, wenn man nun die Tabelle nun nochmal (z.B. Gerade + Gerade = Gerade, …) durchgeht, dann macht das System auch gleich viel mehr Sinn, denn hinter dem ganzen System steckt ausschließlich das Prinzip der Reduktion modulo p dahinter. Wir betrachten dort nur die Reste. Stellen wir uns dazu eine Kiste Astra-bier mit 8 Flaschen (als Alternative zum 6-Pack) vor, wenn nun ein Kumpel 9 Flaschen mitbringt, dann kann man den Kasten zwar füllen, aber es bleibt eine Flasche übrig. Demnach ist also $9 \bmod 8 = 1$. So kann man sich das Prinzip der Reduktion modulo einer Zahl immer leicht vorstellen.

Wir wollen einen Körper mit drei Elementen $\{0, 1, 2\}$ konstruieren. Dazu treffen wir zuerst ein paar Vorüberlegungen:
Es gibt bis auf Isomorphie nur jeweils einen Körper mit drei oder auch vier Elementen, wie wir durch systematisches ausprobieren leicht verifizieren können. Mit etwas mehr Wissen in diesem Bereich kann man sogar allgemein zeigen, dass jeder endliche Körper durch die Anzahl seiner Elemente bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Es existiert bis auf Isomorphie nur eine Gruppe mit drei Elementen, nämlich $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ (Den Beweis hierfür lassen wir ausnahmsweise mal weg, können ihn auf Verlangen aber gerne vorstellen). Demnach muss jeder Körper mit drei Elementen bezüglich der Addition dieselbe Form haben. Bezeichnen wir nun die Elemente in unserem dreielementigen Körper (mit weiser Voraussicht) mit 0, 1, 2, so lauter die Verknüpfungstafel bezüglich der Addition:

$\dot{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

In unserer folgenden Verknüpfungstabelle bezüglich der Multiplikation sind durch $0 \cdot m = 0$ und $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$ bis auf die Verknüpfung $2 \cdot 2$ alle Ergebnisse klar. Es gilt jedoch: $2 \cdot 2 = (1 + 1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 2 + 2 = 1$
Wir erhalten also folgende Verknüpfungstafel:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Die Assoziativität kann man jeweils durch nachrechnen wie eben leicht verifizieren, neutrale und inverse Elemente gehen aus den Verknüpfungstabellen hervor und die Gültigkeit des Distributivgesetzes zeigt man genauso wie eben. Die Kommutativität ist offensichtlich, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale ist.
Insgesamt rechtfertigt dies nachträglich auch unsere Bezeichnungsweise, da M nun isomorph zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ ist. Damit sind wir fertig. ■

Aufgabe 4: [Untergruppen]

Wir haben die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}, \cdot)$ gegeben. Wir nehmen an, dass die Teilmenge $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ eine Untergruppe zu $(\mathbb{R}, +)$ oder $(\mathbb{R}, \cdot)$ bezeichnet. Wir argumentieren mit den Untergruppeneigenschaften der obigen Definition:

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}_+$, dann wählen wir einfach mal $x = 4 \in \mathbb{R}_+$. Nun suchen wir zuerst dass additive Inverse zu 4, welches natürlich -4 ist. Nach Definition einer Untergruppe gilt nun $-4 \in \mathbb{R}_+$, was offensichtlich einen Widerspruch † zur Definition von $\mathbb{R}_+$ mit ausschließlich positiven reellen Zahlen ist. **Demnach ist $\mathbb{R}_+$ schon mal keine Untergruppe von** $(\mathbb{R}, +)$. (die restlichen Untergruppenkriterien sind egal, denn wenn ein Kriterium nicht erfüllt ist, dann ist die Untergruppen-eigenschaft definitionsgemäß nicht erfüllt)

Das neutrale Element der Gruppe $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist leicht sichtbar die 1. Sei nun $y \in \mathbb{R}_+$, dann wählen wir einfach mal $y = 0 \in \mathbb{R}_+$. Nun suchen eine Lösung der Gleichung $y \cdot a = 1$ (wobei a unser inverses Element bezeichnen soll.)

$$y \cdot a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{0}$$

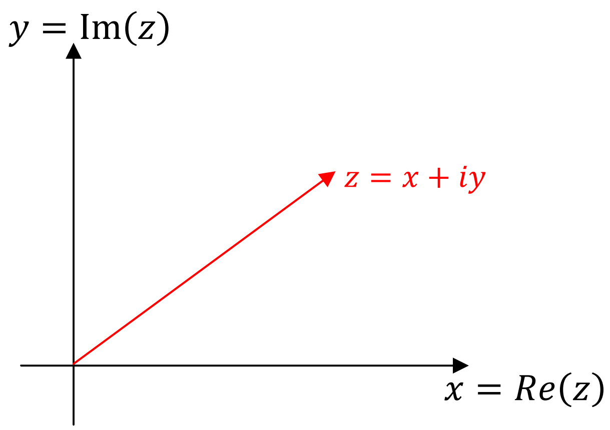
Weil der letzte Ausdruck $\frac{1}{0}$ aber keinen Sinn ergibt, hat diese Gleichung keine Lösung und es handelt sich bei $\mathbb{R}_+$ auch nicht um eine Untergruppe zu $(\mathbb{R}, \cdot)$.

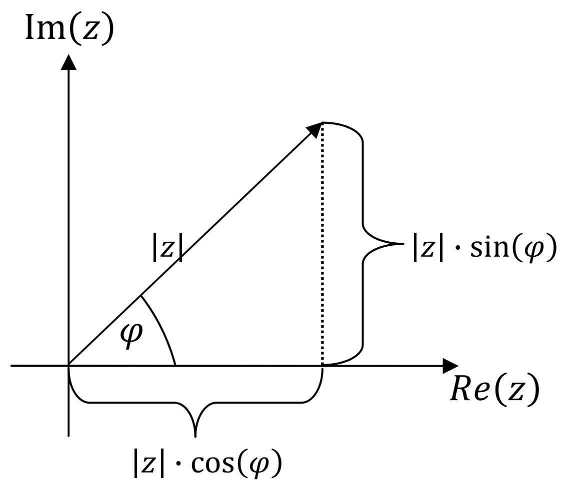
Außerdem handelt es sich bei $(\mathbb{R}, \cdot)$ streng genommen um keine Gruppe (**Fehler in der Aufgabenstellung**), denn $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist nur ein Monoid, welches erst durch die Erweiterungsdefinition: $(\mathbb{R}, \cdot)^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ zu einer Gruppe wird.

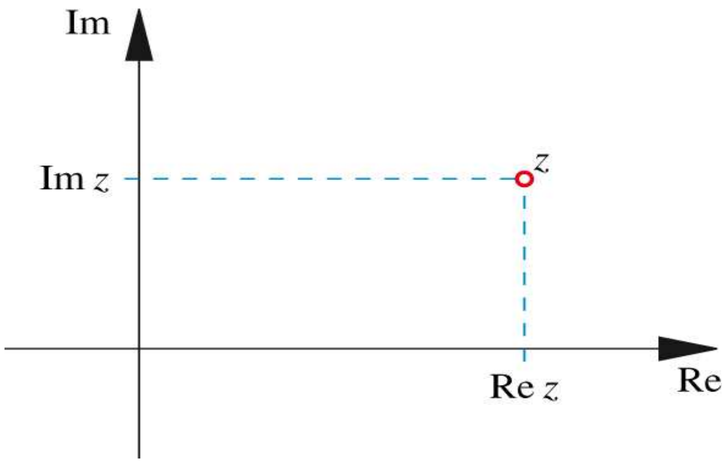
Aufgabe 5.a:

Ganz so einfach war die Aufgabe gar nicht, denn an einer Stelle treten gewisse definitionsgemäße Probleme auf, dazu aber später mehr. Zuerst wollen wir einmal mit dieser Vorüberlegung verstehen, worum es in der Aufgabe genau geht.

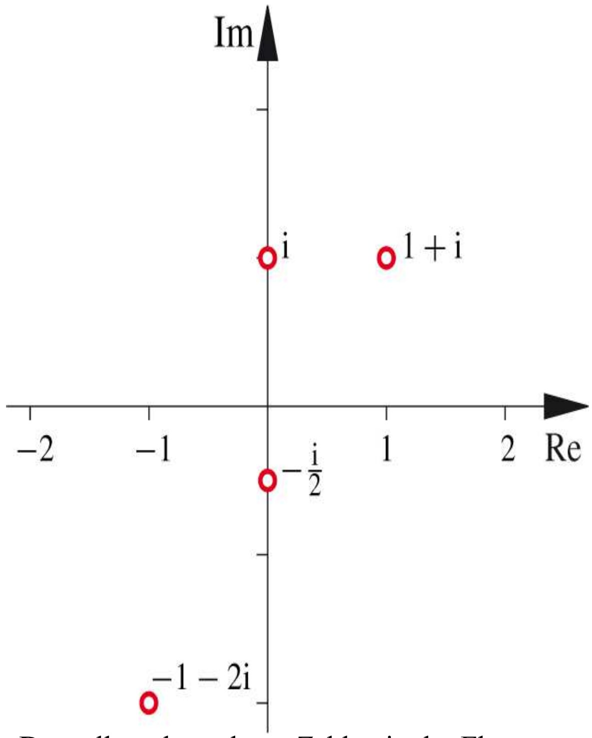
Im folgenden sei $z := a$, denn dies ist in der Lehre der komplexen Zahlen die übliche Bezeichnung. Wählt man $z \in \mathbb{C} := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (wir betrachten die komplexen Zahlen also als das kartesische Produkt $\mathbb{R}^2$ mit dem reellwertigen Zahlentupel (x,y)), dann ist aufgrund der Gleichheit $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,y) + (0,1) \cdot (y,0)\ \ \forall (x,y) \in \mathbb{C}$ und aufgrund der Isomorphie von $\mathbb{R}$ zu $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ die folgende Bezeichnung $\forall x,y \in \mathbb{R} : \mathrm{x} + \mathrm{iy} = (\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{z}$ (*) sinnvoll. Betrachten wir die folgenden Abbildungen, dann stellen wir fest, dass wir (*) auch leicht in Polarkoordinatennotation transformieren können:







Eine komplexe Zahl kann man als Punkt in der Zahlenebene darstellen. Seine kartesischen Koordinaten sind Real- und Imaginärteil der Zahl.



Die Darstellung komplexer Zahlen in der Ebene anhand einiger Beispiele

$$z = \binom{x}{y} = \binom{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} \in \mathbb{R}^2$$

Hierbei heißt dann für $z = x + iy \;\; (x, y \in \mathbb{R})$ $x := \mathrm{Re}(z)$ der Realteil von z und $y := \mathrm{Im}(z)$ der Imaginärteil von z. Außerdem ist $\bar{z} = x - iy$ die zu z konjugierte Zahl und $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ der Betrag (oder die Norm) von z (bzw. der Abstand von z zu 0).

Umgeschrieben mit steht dann da $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ mit $r = |z| =$ Abstand von z zu 0, $\varphi = \arg z =$ Argument von z (eindeutig modulo 2π, außer bei $z = 0$). Wir erhalten die Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ (1)

$$|\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1}$$

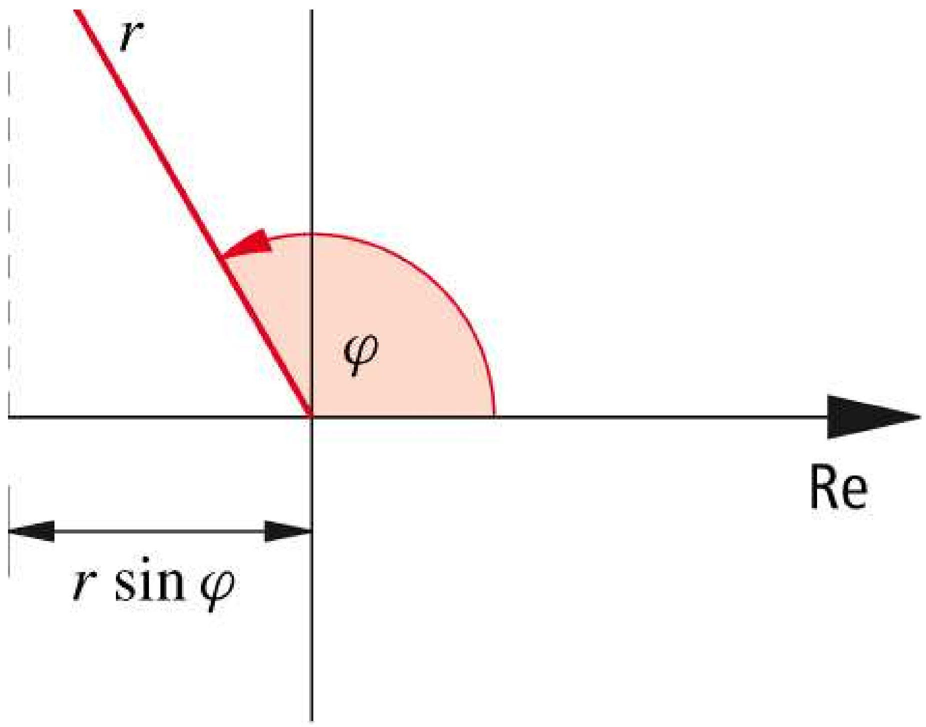
Nach Ablesen aus den Abbildungen folgt mit Mitteln der Trigonometrie:

$$\mathrm{Im}(z) = |z| \cdot \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(z) = |z| \cdot \cos(\varphi)$$

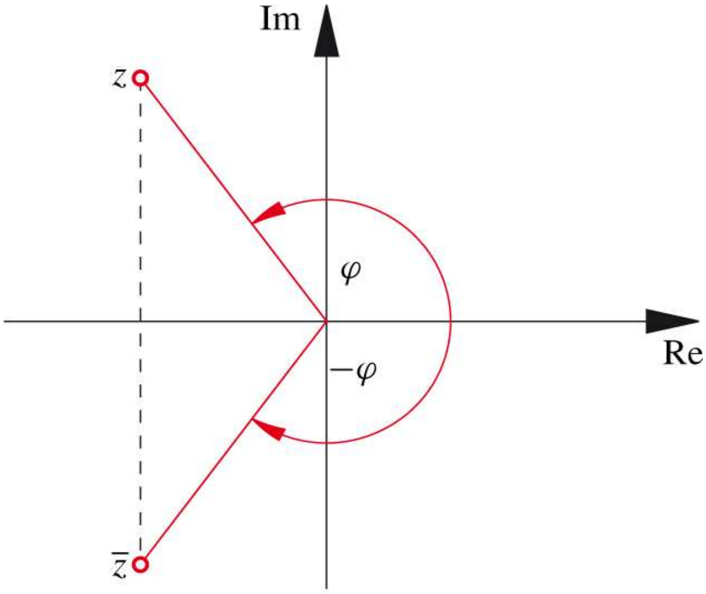
Schließlich resultiert zusammen:

Es gilt: $\binom{x}{y} = \binom{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)} = \binom{|z| \cdot \mathrm{Re}(z)}{|z| \cdot \mathrm{Im}(z)} = \binom{|z| \cdot \cos(\varphi)}{|z| \cdot \sin(\varphi)} = \binom{r\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)} = r\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$

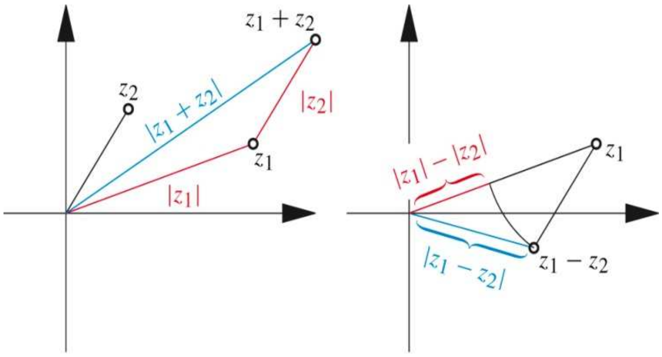
genau dann wenn (1) gilt. Damit haben wir für $z \in \mathbb{C}$ unsere Polarkoordinatendarstellung verifiziert. Die folgenden Abbildungen sollen die Herleitung verdeutlichen:



Die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl besteht aus Radius und Winkel.



Konjugieren einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Ebene entspricht dem Spiegeln an der x −Achse.



Den Namen Dreiecksungleichung bei komplexen Zahlen kann man in der Zahlenebene wörtlich verstehen

Jetzt haben wir genug Vorüberlegungen getroffen, mit der Intention, zu zeigen, dass die Polarkoordinatendarstellung bezüglich der Multiplikation $\{\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot\}$ eine Gruppe ist. ,

Definition 1.0: [Produkte in $\mathbb{C}$]
Das Produkt $z \cdot a$ zweier in Polarkoordinatendarstellung gegebenen Zahlen $z, a \in \mathbb{C}$ ist wie folgt definiert:

$$r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \cdot s\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix} := rs\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\tau)\\ \sin(\varphi+\tau)\end{pmatrix}$$

<u>**Beweis**</u>: Wir zeigen die einzelnen Gruppenaxiome:

G1: <u>Assoziativgesetze</u> Seien $z, a, b \in \{\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot\}$ mit $z = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$ und $a = s\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}$ und $b = t\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix}$, wobei $r = |z|,\ s = |a|$ und $t = |b|$.

$$(z \cdot a) \cdot b = z \cdot (a \cdot b) \text{ ist zu zeigen } \ (\#)$$

$(z \cdot a) \cdot b =$

$$\left(r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \cdot s\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix}\right) \cdot t\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix} \underbrace{=}_{\text{Def.1.0}} rs\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\tau)\\ \sin(\varphi+\tau)\end{pmatrix} \cdot t\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix} \quad (2)$$

Setzen wir nun $Ж := rs$ und $\alpha := \varphi + \tau$ und substituieren diese in (2), dann können wir Definition 1.0 nochmal anwenden und erhalten:

$$rs\begin{pmatrix}\cos(\varphi+\tau)\\ \sin(\varphi+\tau)\end{pmatrix} \cdot t\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix} = Ж\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \cdot t\begin{pmatrix}\cos(\omega)\\ \sin(\omega)\end{pmatrix} = Жt\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\omega)\\ \sin(\alpha+\omega)\end{pmatrix} \quad (3)$$

$z \cdot (a \cdot b) =$

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \left(s \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} \cdot t \begin{pmatrix} \cos(\omega) \\ \sin(\omega) \end{pmatrix} \right) \underbrace{=}_{\text{Def.1.0}} r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot st \cdot \begin{pmatrix} \cos(\tau + \omega) \\ \sin(\tau + \omega) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Setzen wir nun $\text{ƛ} \coloneqq st$ und $\beta \coloneqq \tau + \omega$ und substituieren diese in (4), dann können wir Definition 1.0 nochmal anwenden und erhalten:

$$r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot st \begin{pmatrix} \cos(\tau + \omega) \\ \sin(\tau + \omega) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \text{ƛ} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} = r\text{ƛ} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \beta) \\ \sin(\varphi + \beta) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Eine Resubstitution in (5) ergibt:

$$r\text{ƛ} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \beta) \\ \sin(\varphi + \beta) \end{pmatrix} = rst \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \tau + \omega) \\ \sin(\varphi + \tau + \omega) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Wegen der im Banachraum $\mathbb{R}$ gültigen Körperaxiome folgt: Der rechte Ausdruck in (6) ist gleich dem Resultat in (3).

$$\text{Ж}t \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \omega) \\ \sin(\alpha + \omega) \end{pmatrix} = rst \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \tau + \omega) \\ \sin(\varphi + \tau + \omega) \end{pmatrix}$$

Damit haben wir mit der gültigen Gleichheit beider Seiten aus (#) die Assoziativität gezeigt. ■

G2: Neutrales Element:

Hier treten gleich die in der Einleitung angesprochenen „Probleme" das erste Mal auf: Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist $\tilde{1} \coloneqq 1 + i \cdot 0$. Hieraus lesen wir folgendes ab: $\mathrm{Re}(\tilde{1}) = 1$ und $\mathrm{Im}(\tilde{1}) = 0$. Der Betrag von $\tilde{1}$ ist demnach $\sqrt{1^2 + 0} = 1$. Es bleibt uns also nur noch die Bestimmung der Komponenten unseres neutralen Elements in der Polarkoordinatendarstellung:

$$r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{1 \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{soll das neutrale} \\ \text{Element sein,der} \\ \text{Betrag ist 1.}}} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Durch gutes hingucken erkennt man dass $\begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}$ mit $\tau = 0$ vielleicht unser neutrales Element sein könnte, denn es gilt für $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix}$ die Beziehung $\cos(0) = 1 = \mathrm{Re}(z)$ und $\sin(0) = 0 = \mathrm{Im}(z)$. Aber jeder, der bei Herrn Fiedler (08/09) oder Herrn Reich (10/11) die Vorlesung Analysis I gehört hat, dem wird sofort ins Auge stechen, dass es sogar noch mehrere Lösungen geben könnte denn es gilt mit scharfem Hinsehen: $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$ und $\cos(\sigma + 2\pi) = \sigma$. Was sagt uns dass, wir haben gleich noch mehrere neutrale Elemente bezüglich der Multiplikation gefunden: Es gilt also für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $\tau \coloneqq 2k\pi$

$$r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot 1 \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi + 2k\pi) \\ \sin(\varphi + 2k\pi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir haben also abzählbar unendlich viele neutrale Elemente gefunden, aber das macht doch nichts, oder? Falsch, denn laut Definition einer Gruppe dürfen wir ausschließlich ein eindeutig bestimmtes neutrales Element haben. Wir stellen uns also die Frage, warum haben wir überhaupt mehrere neutralen Elemente gefunden? Antwort: Es gilt nach unseren Vorüberlegungen die Formel $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$. Diese Gleichung ist jedoch mit Vorsicht zu genießen. Einmal ist sie für $x = 0$ gar nicht definiert, es gilt aber auch $0 \notin \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Zum anderen ergibt sich der richtige Winkel immer erst durch Überprüfen des Quadranten, in dem der betrachtete Punkt liegt. Die Winkel φ und $\varphi + \pi$ haben denselben Tangens. Das Vorzeichen von x oder y liefert den richtigen von beiden. Um eine gewisse Eindeutigkeit zu erhalten, schränken wir uns auf Winkel φ mit $|\varphi| < \pi$ ein, also $-\pi < \varphi < \pi$. Sei nun $e(ב) := \cos ב + i \sin ב$. Wegen $e(\varphi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ werden dann die positiven Vielfachen von -1 ausgeschlossen. Jetzt haben wir mit dieser Einschränkung unser eindeutig bestimmtes neutrales Element:

$$1\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \sin(0)\end{pmatrix}$$

Es gilt nämlich wegen der in $\mathbb{R}$ gültigen Körperaxiome:

$$r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}\cdot 1\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \sin(0)\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi+0)\\ \sin(\varphi+0)\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

G3: <u>Inverses Element:</u>

Das inverse Element lautet: $z^{-1} := \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{\|z\|^2} = \frac{|z|}{\|z\|^2}$ mit

$z^* = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ und $\|z\| = \sqrt{z\,z^*} = \sqrt{\left(\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)\right)}$

$$\frac{|z|}{\|z\|^2} = \frac{|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)}} = \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2\cdot\cos^2\varphi + |z|^2\cdot\sin^2\varphi}} = \frac{|z|}{\sqrt{|z|^2(\cos^2\varphi + \sin\varphi)}} =$$

$$\frac{|z|}{\sqrt{|z|^2}} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

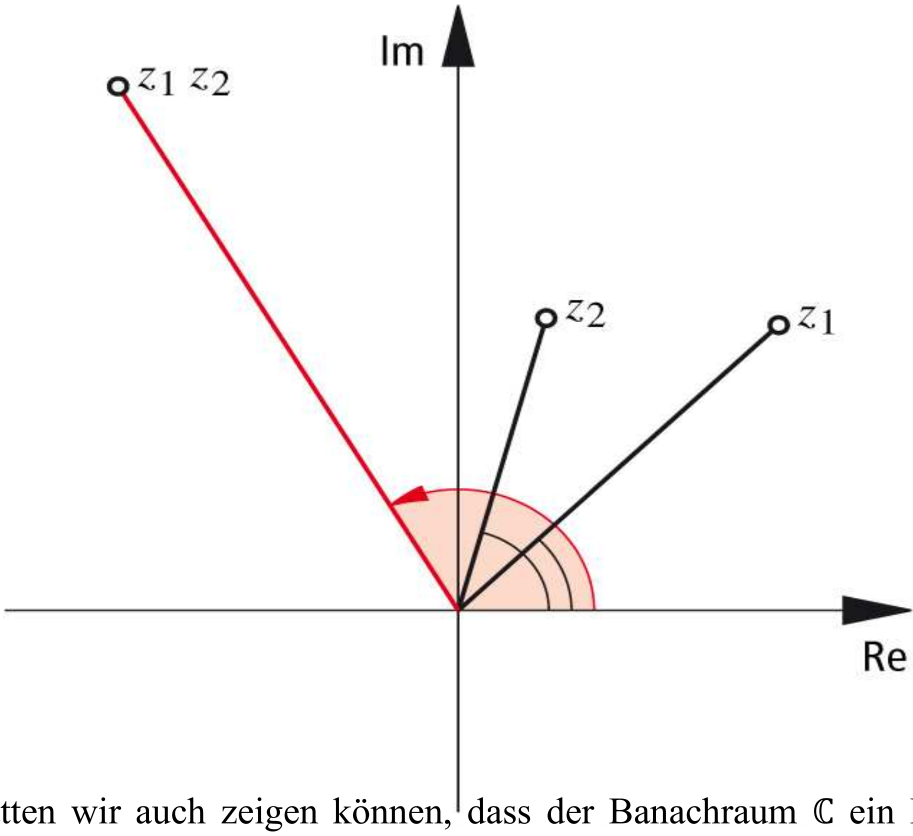
Die folgende Gleichung liefert also unser inverses Element bezüglich der Multiplikation mit obiger Einschränkung in G3) und $\tau := -\varphi$.

$$r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}\cdot 1\begin{pmatrix}\cos(\tau)\\ \sin(\tau)\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix} = r\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos(\varphi-\varphi)\\ \sin(\varphi-\varphi)\end{pmatrix}$$

$$= \frac{r}{r}\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \sin(0)\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}\cos(0)\\ \sin(0)\end{pmatrix}$$

Letzteres ist jedoch das neutrale Element und damit haben wir mit unserem inversen Element bezüglich der Multiplikation $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos(-\varphi)\\ \sin(-\varphi)\end{pmatrix}$ alles gezeigt und somit ist $\{\mathbb{C}\backslash\{0\},\ \cdot\}$ eine Gruppe. ■

Unter der Multiplikation zweier komplexer Zahlen verstehen wir geometrisch die Addition der Winkel der Polarkoordinatendarstellung und das Multiplizieren der Beträge.



Alternativ hätten wir auch zeigen können, dass der Banachraum $\mathbb{C}$ ein Körper ist und demzufolge mit dem Lemma (Jeder Körper ist eine Gruppe) wären wir dann fertig.

Sei nun $z \in \{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\} := \{z = (x, y) = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } |z| = 1\}$, dann wollen wir zeigen, dass $\{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\}$ eine Untergruppe ist.

Aus $|z| = 1$ folgt: $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2$

1. Es ist offensichtlich, dass unsere Untergruppe dasselbe neutrale Element mit Betrag = 1 wie $\{\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot\}$ enthält. Die Untergruppe ist nichtleer, denn es gilt $1 \in \mathbb{C}$. (Eins ist auch hier das neutrale Element.

<u>Lemma</u>: Für alle $z, \omega \in \mathbb{C}$ gilt $|z \cdot \omega| = |z| \cdot |w|$ [Verträglichkeit des Betrags bezüglich der Multiplikation. Beweis: Siehe in „Funktionentheorie 1“ von E. Freitag und R. Busam Kapitel 1 §1 (1.4).

2. Sei hier nun $z, w \in \{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\}$, also mit der Eigenschaft $|z| = |w| = 1$, dann gilt für das Produkt $|z| \cdot |w|$:
   $|z| \cdot |w| = |z| \cdot |z| = |z|^2$. Und wegen der obigen Vorbemerkung $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ gilt dann auch $|z|^2 \in \{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\}$.
3. $[a, b \in U \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in U$ z.z.]
   Sei hier nun $z, w \in \{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\}$, also mit der Eigenschaft $|z| = |w| = 1$, dann gilt:
   $$|z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |z^{-1}| = 1 \in \{\mathbb{C} *\backslash\{0\},\cdot\}$$

Wir haben damit die Untergruppeneigenschaften nachgewiesen. ■