

Zusatzzettel „Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ “

Lernziel: Das Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$ aus geometrischer Sicht.

Wie für das Skalarprodukt so gibt es auch für das Vektorprodukt zwei Definitionen

a) algebraisch

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

und

b) geometrisch

$a \times b$ ergibt einen Vektor c , der senkrecht zu a und b steht („Rechte-Hand-Regel“) und dessen Länge der Fläche des Parallelogramms entspricht, das von a und b aufgespannt wird.

Wieder ist nicht klar, dass beide Definitionen den gleichen Wert liefern. Für den Spezialfall (a auf der x -Achse, b in der x/y -Ebene) kann dieses wieder einfach nachgerechnet werden. Aber im Allgemeinfall?

Allgemeine Kongruenzabbildungen dürfen beim Vektorprodukt (anders als beim Skalarprodukt) nicht angewendet werden, um vom Spezialfall zum Allgemeinfall überzugehen, da eine Spiegelung „aus der Rechten-Hand-Regel eine Linke-Hand-Regel“ machen würde. Also: Nur Drehungen sind erlaubt. Eine Drehung im 3d-Raum lässt sich zerlegen in eine Drehung um die x -, eine um die y - und eine um die z -Achse ($\Rightarrow$ Der Roboterarm mit drei Gelenken). Für eine solche Drehung gibt es Drehmatrizen.

$$Q_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$Q_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$Q_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ich hoffe, dass damit auch klar wird, wie man Drehmatrizen in der ij-Ebene in beliebigen Dimensionen schreibt: Man nehme die Einheitsmatrix und ersetze die Diagonalelemente ii und jj durch $\cos \varphi$ und die Elemente ij und ji werden einmal durch $-\sin \varphi$ und einmal durch $\sin \varphi$ ersetzt. Einfaches Nachrechnen ergibt: Diese Matrizen sind orthogonal)

Anstatt für die algebraische Definition des Vektorproduktes nun

$$(Qa) \times (Qb) = Q(a \times b)$$

für beliebige Drehungen Q zu beweisen, reicht es, diese Gleichung für die drei Einzeldrehungen zu zeigen.

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt ein Matrixprodukt Mb mit der (3x3)-Matrix M, die so aussieht:

$$\begin{pmatrix} -a_z q_{12} + a_y q_{13} & a_z q_{11} - a_x q_{13} & -a_y q_{11} + a_x q_{12} \\ -a_z q_{22} + a_y q_{23} & a_z q_{21} - a_x q_{23} & -a_y q_{21} + a_x q_{22} \\ -a_z q_{32} + a_y q_{33} & a_z q_{31} - a_x q_{33} & -a_y q_{31} + a_x q_{32} \end{pmatrix}$$

Die linke Seite der obigen Gleichung sieht auch so aus, wenn man folgende Eigenschaften ausnutzt, die jeweils für die Elemente der Drehmatrizen gelten (Beweis: elementares Nachrechnen in obigen Matrizen):

$$\begin{array}{lll} q_{11} = q_{22}q_{33} - q_{32}q_{23} & -q_{12} = q_{21}q_{33} - q_{31}q_{23} & q_{13} = q_{21}q_{32} - q_{31}q_{22} \\ -q_{21} = q_{12}q_{33} - q_{32}q_{13} & q_{22} = q_{11}q_{33} - q_{31}q_{13} & -q_{23} = q_{11}q_{32} - q_{31}q_{12} \\ q_{31} = q_{12}q_{23} - q_{22}q_{13} & -q_{32} = q_{11}q_{23} - q_{21}q_{13} & q_{33} = q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12} \end{array}$$

FAZIT: Die algebraische Definition des Vektorproduktes in $\mathbb{R}^3$ und die geometrische Definition stimmen überein.

WEITERES FAZIT: Bei dem Skalarprodukt war es ein Dreieck in der x/y-Ebene (von den Vektoren u und v gebildet), das wir zum Beweis in $\mathbb{R}^2$ verwendet haben. Dieses Dreieck lässt sich nun mittels hochdimensionaler Drehmatrizen in beliebige Positionen drehen (für 2D-Objekte –wie Dreiecke– reichen Drehungen als Kongruenzabbildungen in 3,4,5... Dimensionen aus). Daher gilt die Gleichheit der algebraischen und der geometrischen Definition für Skalarprodukte in beliebigen Dimensionen (Argument des Beweises: Orthogonalität der Drehmatrizen).