Übungsaufgaben zur Klausur LinA I LA

Dominik Puhst

3. Februar 2011

Einige einleitende Worte

Ich habe für euch einige Aufgaben zur Klausurvorbereitung zusammengetragen. Dabei wurde versucht möglichst viel Stoff abzudecken. Ein Anspruch auf Vollständigkeit besteht jedoch nicht. Zu jedem Themenfeld gibt es Aufgaben, die von allen zu lösen sein sollten und besonders markierte Aufgaben, die eher für die Überflieger gedacht sind und in dieser Schwierigkeit wahrscheinlich nicht, oder nur vereinzelt, in der Klausur auftreten werden.

Themenkomplex 1: Gruppen, Körper

a) Entscheiden Sie, ob es sich im Folgenden um Gruppen handelt. Welche der Gruppen sind abelsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

$$(\mathbb{N},+),\ (\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},\cdot),\ (\mathbb{Z},\cdot),\ (\mathbb{R},-),\ (\mathbb{R}^{n\times n},\cdot),\ (\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)\neq 0\},\cdot)$$

b) Erstellen Sie Verknüpfungstafeln für $+$ und $\cdot$, sodass $(\{0,1,a,b\},+,\cdot)$ einen Körper bildet. Dabei sei 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation.

c) Zeigen Sie: Das linksneutrale Element einer Gruppe ist stets auch rechtsneutrales Element.
(*Hinweis:* Der Beweis kann zwei Schritte enthalten. Zunächst zeigen Sie, dass ein linkinverses auch rechtsinverses Element ist, dann, dass daraus folgt, dass ein linksneutrales auch rechtsneutrales ist. Wenn Sie einen der beiden Schritte nicht schaffen, versuchen Sie sich am anderen.)

Themenkomplex 2: (Äquivalenz-)Relationen, Abbildungen

a) Sei $f\colon \mathbb{R}\to[-1,1]$, $x\mapsto \sin(x)$. Ist f injektiv? (surjektiv? bijektiv?) Begründen Sie!

b) Sei $A=\{1,2,3\}$ und $B=\{a,b,c,d\}$. Kann es eine injektive (surjektive, bijektive)

Abbildung von A nach B geben? Kann es eine injektive (surjektive, bijektive) Abbildung von B nach A geben? Begründen Sie!

c) Ist $R \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$ mit

$$(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$$

eine Äquivalenzrelation?

d) Zeigen Sie: Zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ sind entweder gleich oder disjunkt.

Themenkomplex 3: Vektorräume

a) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^5$ ein $\mathbb{Q}$-VR ist, indem Sie die VR-Axiome nachweisen. Dabei dürfen Sie verwenden, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-VR und $\mathbb{R}^5$ ein $\mathbb{R}$-VR ist.

b) Zeigen Sie, dass $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet!

c) Geben Sie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{P}^4$ (Vektorraum der Polynome bis zum Grad 4) an, das keine Basis ist!

d) Ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in span \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$?

e) Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von V. Ist dann auch $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = a_1 + a_2,\ b_2 = a_1 + a_3,\ b_3 = 3a_1 + 2a_2 + a_3$ eine Basis von V?

Themenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Machen Sie eine begründete Aussage zu $def(A)$!

b) Bestimmen Sie $im(A)$ und $ker(A)$!

c) Zeigen Sie, dass $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in im(A)$ und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $Ax = b_1$!

d) Nennen Sie einen Vektor $b_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus im(A)$ und bestimmen Sie, soweit möglich, eine Näherungslösung zu $Ax = b_2$!

e) Geben Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ an zu:

$$\begin{pmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [1] & [1] & [3] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4] \\ [2] \end{pmatrix}$$

f) Geben Sie ein LGS in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ an, das folgende Lösungsmenge besitzt:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [1] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [2] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{pmatrix} \right\}$$

Themenkomplex 5: Lineare Abbildungen, Matrizen

a) Ist $\varphi_1 \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varphi_1\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_3 \\ a_4 - 3a_5 \end{pmatrix}$ linear?

b) Seien der $\mathbb{R}^3$ mit der Basis $B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und der $\mathbb{R}^2$ mit der Basis $B_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ gegeben. $\varphi_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei linear mit:

$$\varphi_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht dann ein allgemeines $\varphi_2\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)$ aus?

Geben Sie die darstellende Matrix von φ_2 bzgl. der Basen B_1 und B_2 an!

c) Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$!

d) Sei $\varphi_3 \colon V \to W$ lineare Abbilung und $\dim V = n < \infty$. Zeigen Sie: $\dim V \geq \dim im(V)$!
Geben Sie je ein Beispiel für $\dim V = \dim im(V)$ und für $\dim V < \dim im(V)$ an!

e) Wie sähe die φ_2 zugehörige darstellende Matrix bezüglich B_1 und B_3 aus, wenn $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ als Basis des $\mathbb{R}^2$ vorausgesetzt würde?

Themenkomplex 6: Determinanten

a) Entscheiden Sie bei den folgenen Aussagen jeweils, ob sie wahr oder falsch sind: (es seien E die Einheitsmatrix, $A, B, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Q orthogonal, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a_i \in \mathbb{R}^n$ die i-te Spalte von A)

1. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. $\det(E) = 1$
4. $\det(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = \det(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n)$
5. $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
6. $\det(A^2) = 2\det(A)$
7. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
8. $\det(A^T) + \det(A) = 0$
9. $(\det(Q))^3 = 1$
10. $\det(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = \det(a_1, ..., a_i, ..., a_j + \lambda a_i, ..., a_n)$
11. $\det(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) = \det(a_1, ..., a_i, ..., a_i + \lambda a_j, ..., a_n)$
12. $a_1, ..., a_n$ linear unabhängig $\Rightarrow \det(a_1, ..., a_n) = 1$
13. $a_1, ..., a_n$ linear abhängig $\Rightarrow \det(a_1, ..., a_n) = 0$
14. $\det(\lambda A) = \lambda^n A$

b) Berechnen Sie $\det(\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix})$

c) Berechnen Sie das Volumen des von $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelepipeds!

d) Beweisen oder widerlegen (durch Gegenbeispiel) Sie die Aussagen aus Aufgabenteil a) beginnend mit Aussage 4. Beziehen Sie sich bei den Beweisen auf die Defminition der Determinante (multilinear, alternierend, normiert) und vorherige (weiter oben stehende) Aussagen!

Themenkoplex 7: Euklidische Geometrie

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^5$ sowie

$$\mathcal{H}_1 : \begin{pmatrix}1\\4\\3\\0\\1\end{pmatrix} + span\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$\mathcal{H}_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + 16 = 0$

a) Begründen Sie, dass es sich hierbei um Hyperebenen handelt!

b) Bestimmen Sie den Abstand von $\mathcal{H}_2$ zum Ursprung!

c) Bestimmen Sie $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$! Was für eine algebraische Struktur erwarten Sie?

d) Bestimmen Sie auch den Schnittwinkel α zwischen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$!

e) Geben Sie eine Gerade g an, die in $\mathcal{H}_1$, nicht aber in $\mathcal{H}_2$ liegt!

f) Zeigen Sie allgemein: Zwei nicht parallele Hyperebenen schneiden sich!

Themenkomplex 8: Sonstiges

a) Ziegen Sie, dass $a = \frac{2x^2+8x-4}{x^3-3x^2-4x} \in span\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x-4}\right)$ und stellen Sie a als Vektor mit reellwertigen Komponenten dar!

b) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom $f \in \mathbb{P}^3$ mit $f(-1) = 1,\ f(0) = -4,\ f(1) = 0,\ f(2) = 3$!

ci) Geben Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die maximal eine 0 enthält und weisen Sie nach, dass es sich bei ihrer Konstruktion tatsächlich um eine otrhogonale Matrix handelt!
cii) Enthält Ihre Matrix eine Spiegelung?
ciii) Geben Sie Q^{-1} an!
civ) Zeigen Sie allgemein: Q orthogonal $\Leftrightarrow$ Q^T orthogonal!

d) Weisen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel nach, dass man guten Gewissens folgende Beweisstruktur verwenden kann:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

Zeigen Sie auch, dass die Rückrichtung nicht für einen Beweis taugt!