Mathematatik Zusammenfassung: Tutorium 1

17. Oktober 2019

1 Komplexe Zahlen

Definition (Komplexe Zahl): *Komplexe Zahlen besitzen die Form* $z = x + iy$ *mit* $i^2 = -1$*. Die Menge aller komplexen Zahlen ist demnach gegeben durch* $\mathbb{C} = \{z = x + iy, | x, y \in \mathbb{R}\}$*. Der Realteil ist* $\mathrm{Re}(z) = x$ *und der Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z) = y$.

Komplexe Zahlen können geometrisch als Bildpunkte in der „xy-Ebene“ dargestellt werden, wobei die Ebenene als GAUSS’sche Zahlenebene bezeichnet wird.

Beispiel (Komplexe Zahlen in der GAUSS*’schen Zahlenebene):*

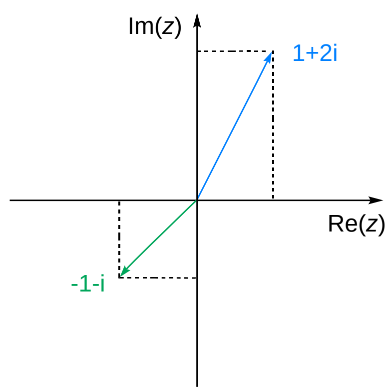

Abbildung 1: Zwei komplexe Zahlen in der GAUSS’schen Zahlenebene.

Mit komplexen Zahlen rechnet man genauso wie mit reellen Zahlen, wobei immer der Real- und der Imaginärteil getrennt zusammengefasst werden.

Zusätzlich gibt es im Vergleich zu den reellen Zahlen noch die folgenden weiteren Grundbegriffe:

- Komplex Konjugiertes: Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist das komplex Konjugierte $\bar{z} = x - iy$.
- Betrag einer komplexen Zahl: Der Betrag von $z = x + iy$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

Beispiel (Grundrechenoperationen mit komplexen Zahlen):

Gegeben seinen $z_1 = 3 - 2i$ und $z_2 = 2 + i$. Dann ist

- $z_1 + z_2 = 5 - i$
- $z_1 - z_2 = 1 - 3i$
- $z_1 z_2 = 6 - 4i - 4i - 2i^2 = 8 - 8i$
- durch Erweitern mit $\bar{z_1}$: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-2i)}{(2+i)}\frac{(2-i)}{(2-i)} = \frac{1}{5}(4 - 7i)$

Definition (Polardarstellung): *Jede komplexe Zahl kann neben der vorgestellten kartesischen Darstellung* $z = x + iy$ *in die Polardarstellung* $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r\exp(i\varphi)$ *umgeformt werden, wobei* $r = |z|$ *und* $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{z}\right)$ *im 1. und 2. Quadranten. Im 3. und 4. Quadranten benutzt man* $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{z}\right) + \pi$.

Die Polardarstellung hat geometrisch ebenfalls eine anschauliche Bedeutung: bei Multiplikation multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente. Das erkennen wir durch Anwendung der Potenzrechenregeln für einen allgemeinen Fall. Gegeben seien $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1)$ und $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$. Dann ist $z_1 \cdot z_1 = \{r_1\exp(i\varphi_1)\}\{r_2\exp(i\varphi_2)\} = r_1 r_2 \exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2) = r_1 r_2 \exp(i[\varphi_1 + \varphi_2])$.

Häufig ist es nicht notwendig, bei der Umrechnung einer komplexen Zahl von der kartesischen in die Polardarstellung den Betrag und Winkel mit einer Formel auszurechen. Wenn wir uns an die Punktdarstellung von komplexen Zahlen erinnern, können wir den die Werte einfach „ablesen", z.B. ist $i = 1 \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ oder $-1 = \exp(i\pi)$. Aus der letzen Formel folgt die berühmte EULER-Darstellung $0 = \exp(i\pi) + 1$.

Definition (Einheitswurzeln): *Eine Gleichung* $z^n = 1,\ n \in \mathbb{N}$ *hat genau* n *Lösungen. Diese heißen* n*-te Einheitswurzeln und haben die allgemeine Form erfüllt sind:*$w_k = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\left[\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right]\right),\ k = 1, ..., n.$

Die Lösungen liegen in der GAUSS'sche Zahlenebene äqudistant auf einem Kreis. Die Formel müssen wir uns nicht merken, wenn wir uns bewusst machen was passiert. Hier hilft ein Beispiel:

Beispiel (Berechnung von Einheitswurzeln):

Wir suchen die Lösungen w_1, w_2 von $z^2 = 2i$. Die Polardarstellung lautet $z^2 = 2\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$. Was passiert, wenn wir die Wurzel ziehen? Wir erhalten:

$$\sqrt{2\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} \cdot \left[\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right) \curvearrowright z_1 = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{1}{4}\pi\right)$$

Das ist unsere erste Lösung (Nicht vergessen, beim Wurzelziehen erhalten wir immer zwei Lösungen, eine mit positiven und eine negativem Vorzeichen!). Die zweite folgt direkt, weil wir wissen, dass alle Lösungen äqudistant auf einem Kreis liegen. Das sie auf einem Kreis liegen bedeutet, dass der Radius gleichbleiben muss. Äqudistant heißt, der „Winkelabstand" $\Delta\varphi$ zwischen allen komplexen Lösungen muss gleich groß sein. Weil wir nur zwei Lösungen haben, ist dieser Abstand im Bogenmaß $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{2}$ (für n Lösungen lautet er allgemein $\frac{2\pi}{n}$).

Die zweite Lösung ist also:

$$z_2 = \sqrt{2}\exp\left(i\left[\frac{1}{4}\pi + \Delta\varphi\right]\right) = \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right) \curvearrowright z_2 = \exp\left(i\frac{5}{4}\pi\right)$$

2 Algebraische Strukturen

Unter algebraischen Strukturen versteht man Mengen, welche mit (mindestens) einer Verknüpfung versehen sind. Eine Verknüpfung ist dabei im Wesentlichen eine Arbeitsvorschrift, beispielsweise: „Addiere zwei Zahlen“. Diese Zahlen müssen jedoch nicht näher spezifiziert werden, denn die Addition soll für jede mögliche Kombination von Zahlen erlaubt sein. Gruppen sind also die theoretische Grundlage für das Rechnen mit ganzen Zahlen (also $1+2=3$) , was wir alle [hoffe ich ;-)] in der Schule gelernt haben.

Definition (Gruppe): *Aus einer nicht-leeren Menge* G *mit einer Verknüpfung zweier Elemente* $\circ$ *entsteht eine Gruppe* $(G, \circ)$*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

- *Abgeschlossenheit: Wenn* a, b *in* G *sind, dann ist auch* $a \circ b$ *in* G.
- *Assoziativität: Es gilt* $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *für alle* a, b, c *in* G.
- *Existenz des neutralen Elementes: Es gibt ein Element* e *in* G*, sodass* $a \circ e = e \circ a = a$ *(wobei* a *in* G *liegt).*
- *Existenz der inversen Elemente: Es gibt Elemente* a^{-1} *in* G*, sodass* $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ *(wobei* a *in* G *liegt).*

Gilt darüber hinaus noch Kommutativität ($a \circ b = b \circ a$*), dann heiß die Gruppe abelsch.*

Beispiel: $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit $e = 0$ und $a^{-1} = -a$ (diese Gruppe beschreibt das Addieren von Zahlen in den ganzen Zahlen). $(\mathbb{Z} \backslash 0, \cdot)$ ist keine Gruppe, da $a^{-1} = \frac{1}{a}$ nicht zwangsläufig abgeschlossen ist.

Beispiel (Gruppentafel):

Bei diesen Tafeln handelt es sich um Tabellen, in deren ersten Zeile bzw. Spalte die Elemente der Gruppe stehen. Die inneren Einträge der Tabelle entstehen durch Anwendung einer definierten Verknüpfung der Gruppenelemente. Bei abelschen Gruppen ist die Gruppentafel symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

$+$	e	a
e	e	a
a	a	$2a$

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	a^2

Abbildung 2: Beispiel für zwei „kleine“ Gruppentafeln.

Nehmen wir diesmal den Kollgegen $(\mathbb{R},+)$ als Motivation zur Einführung des Körpers. Wir wollen nicht nur addieren, sondern auch multiplizieren können. Diese algebraische Struktur nennen wir Körper. Der angesprochene Körper entsteht im Wesentlichen, indem wir $(\mathbb{R},+)$ und $(\mathbb{R}\backslash 0,\cdot)$ kombinieren. Weil wir auch Mischungen von + und $\cdot$ beschreiben wollen, etwa $3\cdot(4+2) = 3\cdot 4+3\cdot 2,$ wird als Bedingung noch das Distributivgesetz gefordert.

Definition (Körper): *Aus einer nicht-leeren Menge $\mathbb{K}$ mit zwei verschiedenen Verknüpfung von jeweils zwei Elementen der Menge ($\circ$ und $\Diamond$) entsteht ein Körper $(\mathbb{K},\circ,\Diamond)$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

- *$(\mathbb{K},\circ)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutrales Element $n = 0$, d.h. $\circ$ ist eine additive Verknüpfung.*
- *$(\mathbb{K}\backslash n,\Diamond)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutrales Element $e = 1$, d.h. $\Diamond$ ist eine multiplikative Verknüpfung.*
- *Distributivität: Es gilt $a\Diamond(b\circ c) = a\Diamond b\circ a\Diamond c$ für alle a,b,c in $\mathbb{K}$.*

Beispiel: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ist der Körper, mit dem wir in der Mittelstufe rechnen gelernt haben. Mann kann reelle Zahlen addieren (wobei $e = 0$ und $a^{-1} = -a$) und multiplizieren (wobei $e = 1$ und $a^{-1} = \frac{1}{a}$), wobei Abgeschlossenheit auch für die multiplikative Verknüpfung gegeben ist. (Für Interessierte: der Grund ist, dass die reellen Zahlen kontinuiertlich, die Matematiker sagen überabzählbar unendlich oder dicht, sind.)

Mit dem Körper können wir nun in einer Dimension rechnen (zwei oder mehrdimensionale Graphen sind die Folge von Abbildungen, mit den Grundrechenoperationen bleiben wir für $\mathbb{R}$ immernoch auf „einer Linie“). Es ist nun ganz natürlich, auch Punkte - etwa im dreidimensionalen Raum- beschreiben zu wollen. Dies kann geleistet werden, wenn wir auf Grundlage des Körpers den Vektorraum einführen.

Definition (Vektorraum): *Eine abelsche Gruppe $(V,+)$ und ein Körper $(\mathbb{K},+,\bullet)$ bilden einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$, wenn die Eigenschaften der Vektoraddition $+ : V\circ V \rightarrow V$ und skalaren Multiplikation $\bullet : \mathbb{K}\circ V \rightarrow V$ erfüllt sind.*

Für die Vektoraddition $+$ muss gelten:

- *Abgeschlossenheit: Wenn a,b in V sind, dann ist auch $a+b$ in V.*
- *Assoziativität: Es gilt $a+(b{+}c) = (a+b)+c$ für alle a,b,c in V.*
- *Existenz des neutralen Elementes: Es gibt ein Element e in V, sodass $a+e = e+a = a$ (wobei a in V liegt).*
- *Existenz der inversen Elemente: Es gibt Elemente a^{-1} in V, sodass $a+a^{-1} = a^{-1}+a = e$ (wobei a in V liegt).*
- *Kommutativität: $a+b = b+a$ (wobei a,b in V liegen).*

Für die skalaren Multiplikation $\bullet$ muss gelten:

- *Abgeschlossenheit: Wenn* a *in* V *und* α *in* $\mathbb{K}$ *ist, dann ist auch* $\alpha \bullet a$ *in* V.

- *Assoziativität: Es gelten* $\alpha \bullet (a + b) = \alpha \bullet a + \alpha \bullet b$ *und* $(\alpha + \beta) \bullet a = \alpha \bullet a + \beta \bullet a$ *(wobei* a *in* V *und* α, β *in* $\mathbb{K}$ *liegen).*

- *Existenz des neutralen Elementes: Es gibt ein Element* e *in* $\mathbb{K}$*, sodass* $a \bullet e = e \bullet a = a$ *(wobei* a *in* V *liegt).*

Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren $|v\rangle$.

Anmerkung:

Wir erkennen, dass Vektoren als abstrakte Objekte mit $|v\rangle$ notiert werden. Die Notation aus der Schule mit dem Pfeil $\vec{v}$ wird nur für Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}^3$ (und $\mathbb{R}^2$) genutzt. Die Vektoren aus der Schule können nämlich als Parallelverschiebungen eines Startpunktes aufgefasst und daher anschaulich mit eben solchen Pfeilen symbolisiert werden. Dies gilt aber nicht allgemein für Vektoren. Wir werden später noch sehen, dass es sich auch bei Funktionen um Vektoren handeln kann.

Definition (Basis): *Eine Basis* $B = \{|b_k\rangle\}$ *ist ein Teilmenge des Vektorraumes , die ein minimales Erzeugendensystem darstellt.*

Ein minimales Erzuegendensystem stellt sich die Frage, wie viele Vektoren wir maximal brauchen, um den gesamten Vektorraum aufzuspannen. Aufspannen bedeutet hierbei, dass durch eine geeignete Linearkombination jeder Punkt des Vektorraumes erreicht werden kann. Die Anzahl der Basisvektoren ist dabei gleich der Dimension des Vektorraumes. Dies kann man sich am dreidimensionalen Raum klar machen. Nur durch drei (oder mehr, aber dann liegt kein minimales Erzeugendensystem mehr vor) Vektoren kann jeder Punkt in Raum erreicht werden. Stehen nur zwei Vektoren zur Linearkombination zur Verfügung, können wir die Ebene niemals verlassen.

Anmerkung:

Vektoren $|v\rangle$ eines Vektorraumes sind erstmal nur abstrakte Objekte, mit denen wir nicht „rechnen" (aber trotzdem Mathematik machen!) können. Erst durch die Definition einer Basis können wir den Elementen $|v\rangle$ tatsächlich Werte zuweisen. Es gibt allerdings nicht eine einzige Basis, die den betrachteten Vektorraum aufspannt, sondern unendlich viele. Je nachdem, welche Basis wir zur *Darstellung* unseres Vektors nutzen, erhalten wir unterschiedliche (also basisabhängige) Werte. Falls das noch verwirrend ist - keine Sorge! Hierzu erfahren wir später noch mehr.