# Mathematik Zusammenfassung: Tutorium 12

22. Januar 2020

## 1 Grundlegende Begriffe

**Definition (Differentialgleichung) :** *Eine Differentialgleichung (DG) ist eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion und einer oder mehreren ihrer Ableitungen ausdrückt.*

Wir unterscheiden verschiedene Typen von DGn. Für „einfache“ DGn existieren für die unterschiedlichen Typen allgemeine Lösungsverfahren. Der Ansatz zur Lösung hängt entscheidend von ihrem ab Typen ab. Daher ist es essenziell, DGn klassifizieren zu können.

**Klassifikation:** Eine DG heißt

- *gewöhnlich*, wenn die auftretende Funktion von einer Variablen abhängt oder keine partiellen Ableitungen nach mehr als einer Variablen auftreten.
- *partiell*, wenn die auftretende Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen nach mehr als einer Variablen auftreten.
- Die *Ordnung einer DG* ist die höchste Ordnung der auftretenden Ableitungen.
- Ist die DG von der Form

$$b(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x)\, y^{(n)} = c_0(x)y + c_1 y\prime + c_2(x)y'' + \dots$$

  so spricht man von einer *linearen DG*, andernfalls ist die DGL *nicht-linear*.
- Eine DG heißt *homogen*, falls $b(x) = 0$ ist, und andernfalls *inhomogen*. Hängen die Koeffizienten nicht von einer Variablen ab, wird die DGL folglich als *DGL mit konstanten Koeffizienten* bezeichnet.

**Beispiele:** Die folgenden DGn sind alle gewöhnlich.

- $y''' + 2y'' = 0$ ist eine lineare, homogene DG mit konstanten Koeffizienten 3.Ordnung.
- $y''' + 2y'' = \sin(2x)$ ist eine lineare, inhomogene DG 3.Ordnung.
- $y''' = y \cdot y'$ ist eine nicht-lineare inhomogene DG mit konstanten Koeffizienten 3.Ordnung.
- $y'' = x^2$ ist eine lineare, inhomogene DG mit konstanten Koeffizienten 2.Ordnung.
- $y' - y^2 = 0$ ist eine nicht-lineare, homogene DG mit konstanten Koeffizienten 1.Ordnung.

Im Folgenden werden wir die Lösungsverfahren für die Berechnung von ausgewählten gewöhnlichen DG 1.Ordnung besprechen. Glücklicherweise gibt es für jeden dieser DG-Typ ein „Kochrezept“, welches immer zum Ziel führt.

# 2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

## Trennung der Variablen

Wir betrachten eine DG erster Ordnung der Form $y' = f(x)g(y)$. Dieser Typ von DG wird als *separierbar* bezeichnet und ist besonders einfach mittels *Trennung der Variablen* zu lösen: Wir ersetzen zunächst den Ausdruck $y'$ durch $\frac{dy}{dx}$ , trennen die Variablen $x$ und $y$ und integrieren $\int \frac{1}{g(y)} dy = f(x)\, dx$. Fertig.

In der Chemie kommen seperable DG in vielen Verschieden Bereichen vor. Wir wollen ein Beispiel betrachten:

**Beispiel (Lambert-Beer’sche Gesetz):**

Das Lambert-Beer’sche Gesetz beschreibt die Abnahme der Intensität von elektromagnetischen Strahlung, wenn diese ein Medium entlang durchtritt. Beim Durchtritt der Strahlung durch das Medium kommt es zur Absorption. Dabei ist die differentielle Abnahme der Intensität $dI(x)$ pro Wegstück $dx$ proportional zur

- ortsabhängigen Intensität der Strahlung $I(x)$
- Absorptionsstärke des Mediums $\varepsilon$
- Konzentration des Mediums $c$

Mit diesen Informationen können wir die DG $-\frac{dI(x)}{dx} = I(x)\varepsilon c$ aufstellen. Das Minuszeichen zeigt an, dass die Intesität der Strahlung abnimmt. Da diese DG separierbar ist, erfolgt die Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{I(x)} dI(x) = \varepsilon c dx$$

Durch bestimmte Integration wird das LAMBERT-BEER'sche Gesetz erhalten. Hierbei ist $I_0$ die Einstrahlintensität und $l$ der Durchtrittsweg durch das absorbierende Medium.

$$\int_{I_0}^{I} \frac{1}{I(x)}\, dI(x) = \varepsilon c \int_{0}^{l} x\, dx$$

$$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = \varepsilon c l$$

## Exakte Differentialgleichung

Eine DG der Form

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Leftrightarrow P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

heißt *exakte* oder *totale DG*, sofern die *Integrabilitätsbedingung (*EULER*-Relation)* $\partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y)$ gilt. Dabei kann $y'$ als totales Differential $dU(x,y) = \partial_x U(x,y) + \partial_y U(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ einer noch unbekannten Funktion $U(x,y)$ auffassen. Es müssen $\partial_x F(x,y) = P(x,y)$, $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$ und $F(x,y) = K = \text{const.}$ sein. Zum Auffinden der allgemeinen Lösung einer solchen DG geht man folgendermaßen vor:

i) Prüfe, ob der Satz von Schwarz gilt, also ob die DG exakt ist.

ii) Bestimme $U(x,y)$ durch Integration von $P(x,y)$ nach $x$. Es taucht eine Integrationskonstante $C(y)$ auf.

iii) Leite $U(x,y)$ partiell nach $y$ ab und setze $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$. Durch diese Gleichung wird ein Ausdruck für $C'(y)$ gefunden.

iv) Integriere $C'(y)$, um einen Ausdruck für $C(y)$ zu erhalten. Dieser wird in $U(x,y)$ eingesetzt. Nach Zusammenfassen hat man die allgemeine Lösung gefunden.

**Beispiel (Lemniskate):** Eine Lemniskate ist eine schleifenförmige geometrische Kurve in Form einer gekippten Acht/eines Unendlich-Symbols. Die Lösung der exakten DG $\left(4x^3 - 2x\right) dx + 2y\, dy = 0$ ist $x^4 - x^2 + y^2 = 0$. Diese Lösungskurve wird als die Lemniskate von GERONO bezeichnet. Die Versuche von die Bogenlänge verscheidender Lemniskaten zu berechnen, führten zu der Theorie der elliptischen Funktionen.

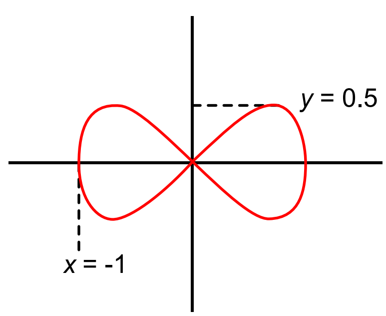


**Abbildung 1:** Die Lemniskate von GERONO.

von M. Kapitzke