Mathematik Zusammenfassung: Tutorium 2

25. Oktober 2019

1 Produkte von Vektoren im Anschauungsraum

Wir befinden uns nun im über Vektorraum dem Körper $\mathbb{R}^3$. Die Menge aller möglichen Parallelverschiebungen eines Startpunktes heißen Vektoren $\vec{v}$ und lassen sich als 3-Tupel ($\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren) mit reellen Zahlen als Einträge schreiben. Sie werden bezüglich eines Koordinatensystems ausgedrückt, hier in der kartesischen Basis B:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Definition (Skalarprodukt im Anschauungsraum): *Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, die einen Winkel φ einschließen, ist:*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos(\varphi)$$

Wie immer hilft ein Rechenbeispiel, um die Definition besser zu verstehen:

Beispiel (Skalarprodukt im Anschauungsraum): Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{v} = (1,1,2)^T$ und $\vec{v} = (3,1,1)^T$. Dann ist das Skalarprodukt:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 2 = 6$$

Wir erkennen in der Definitionsformel des Skalarproduktes (im Anschauungsraum), dass man für zwei gegebene Vektoren jederzeit den Winkel zwischen eben jenen berechnen kann, nämlich mit:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}\right)$$

Beispiel (geometrische Interpretation des Skalarproduktes):

Doch wie genau wissen wir eigentlich, welche geometrische Bedeutung dem Skalarprodukt für Parallelverschiebungen innewohnt? Warum kann man damit Winkel ausrechnen? Hierfür wollen wir die beiden Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{und } \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachten. Diese beiden liegen in der xy-Ebene, vgl. Abbildung 1.

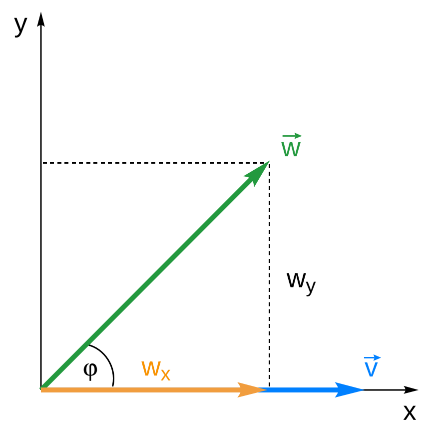

Abbildung 1: Darstellung von von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in der xy-Ebene.

Das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ projeziert die x-Komponente von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$ und skaliert diese: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x$. Um den Winkel φ zu bestimmen, müssen wir lediglich das rechtwinkle Dreieck mit der Hypotenuse $|\vec{w}|$ und der Ankathete w_x betrachten. Es gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{w_x}{|\vec{w}|}$$

Durch erweitern mit v_x erhalten wir:

$$\cos(\varphi) = \frac{v_x w_x}{v_x |\vec{w}|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \, |\vec{w}|}$$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass der Vektor $\vec{v}$ auf der x-Achse liegt. Das faszinierende ist nun, dass diese für diesen Spezialfall hergeleitete Formel auf beliebige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gilt.

Wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, oder im allgemeinen $\langle v | w \rangle = 0$, dann sagt man $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind *orthogonal*. Im Anschauungsraum bedeutet dies nichts anderes, als dass die beiden Vektoren wegen $\cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ rechtwinklig zueinander stehen. Mithilfe des Skalarproduktes kann außerdem der Betrag eines Vektors beschrieben werden:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Somit ist mit dem Skalarproudkt die Grundlage für den Begriff des Orthonormalsystems (ONS) gelegt. Ein ONS bezeichnet eine Menge von Vektoren aus einem Vektorraum mit Skalarprodukt, welche auf die Länge eins normiert sind und zueinander orthogonal stehen. Vektorräume mit einem ONS als Basis haben besonders schöne Eigenschaften. Deshalb werden wir in einem späteren Kapitel ein Verfahren lernen, wie man zu einem beliebigen Vektorraum ein ONS finden kann.

Außerdem können Vektoren mit dem Skalarprodukt in Anteile parallel und senkrecht zu einem anderen Vektor zerlegt werden. Sei $\vec{v}$ so ein Vektor, der in einen senkrechten Anteil $\vec{v}_1$ und einen parallelen Anteil $\vec{v}_2$ zu einem Vektor $\vec{w}$ zerlegt werden soll. Dann gelten: (i) $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$, (ii) $\vec{v}_1 \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{w} = \vec{0}$ und (iii) $\vec{v}_2 = \lambda \vec{w}$.

Definition (Kreuzprodukt): *Das Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, die einen Winkel φ einschließen, ist der zu beiden Vektoren senkrechte Vektor:*

$$\vec{v} \times \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos(\varphi)\, \vec{e}_n, \; \vec{e}_n \perp \vec{u} \,\text{und}\, \vec{e}_n \perp \vec{v}$$

Es ist Antikommutativ, d.h. es gilt $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Mithilfe des Kreuzproduktes lassen sich Flächen berechnen, denn die Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch $|\vec{v} \times \vec{w}|$, vgl. Abbildung 2. Aufpassen, das Ergebnis eines Kreuzproduktes ist nun ein neuer Vektor, kein Skalar (keine Zahl). Anders als das Skalarprodukt existiert das Kreuzprodukt nur im $\mathbb{R}^3$, also für Vektoren mit drei Komponenten.

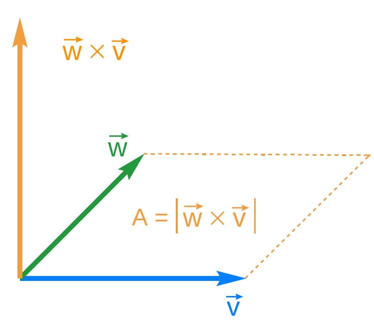

Abbildung 2: Darstellung von von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in der xy-Ebene.

Es gibt eine deutlich einfachere Möglichkeit als in der Definiton - nämlich ein Kochrezept - Kreuzproduke auszurechnen [dann sehen wir auch, warum wir die Dinger Kreuzprodukt nennen ;-)].

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{array}$$

Zuerst schreiben wir die ersten beiden Komponenten des Vektors nocheinmal unter diesen und streichen daraufhin erste Zeile in Gedanken durch. Dann erhalten wir die erste Komponente des neuen Vektors indem wir die beiden darunter liegenden Zeilen „über kreuz“, vgl. obenstehende Gleichung. Das gleiche Wiederholen wir für die zweite und dritte Zeile.

Um das Ganze zu Üben rechnen wir ein Beispiel:

Beispiel (Kreuzprodukt): Gegeben seien die beiden Vektoren $\vec{v} = (1,1,2)^T$ und $\vec{v} = (-3,1,1)^T$. Dann ist das Kreuzprodukt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -3 \\ 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exkurs (Beweis): Mit einfacher Vektorrechnung soll der folgende Satz bewiesen werden: *Die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren eines beliebigen Tetraeders ergibt den Nullvektor.*

Ein Tetraeder mit den Eckpunkten O, A, B und C werde durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ sowie $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ aufspannt. Die vier Flächenvektoren sind

Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, welches aus den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CA}$ besteht. Die vier Flächenvektoren, die jeweils senkrecht auf den Dreiecksflächen, und zwar nach außen orientiert (nutze Antikommutativität) stehen, sind:

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right), \vec{f}_2 = \frac{1}{2}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right), \vec{f}_3 = \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c}), \vec{f}_4 = \frac{1}{2}\left(\left[\vec{b} - \vec{a}\right] \times [\vec{c} - \vec{a}]\right)$$

$$\vec{f}_4 = \frac{1}{2}\left(\left[\vec{b} - \vec{a}\right] \times [\vec{c} - \vec{a}]\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) - \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{a})$$

Dabei ist das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{b}$. Somit findet man:

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{f}_i = \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right), + \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c}) - \frac{1}{2}\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) - \frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{0}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition (Spatprodukt): *Das Spatprodukt* $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ *ist das orientierte Volumen des von den Vektoren* $\vec{v}, \vec{w}$ *und* $\vec{u}$ *aufgespannten Parallelepipeds:*

$$V = |(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}|$$

Beispiel (Volumen eines Tetraeders): Ein Tetraeder mit den Eckpunkten O, A, B und C werde durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ sowie $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ aufspannt. Dann ist das Volumen von diesem gegeben durch:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

analog gilt für einen Oktaeder (der aus zwei Tetraedern besteht):

$$V = \frac{1}{3}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$