Mathematik Zusammenfassung: Tutorium 6

24. November 2019

1 Bedeutung der Determinante

Die Determinante ist ein nützliches Hilfsmittel, beispielsweise um Aussagen zu der Lösung von LGS zu treffen. Interessanterweise fanden die ersten Überlegungen zur Determinante etwa 200 Jahre vor den ersten Ansätzen der Matrixen statt, was daran liegt, dass sie nicht an geometrische Strukturen geknüpft ist, sondern (wie heute noch) genutzt wurde, um die Lösbarkeit von Gleichungssystemen zu „determinieren“. Zuert wollen wir ganz abstrakt klären, was Determinanten überhaupt sind.

Definition (Determinante): *Die Determinante* $\det(\underline{A})$ *ordnet einer quadratischen Matrix* $\underline{A}$ *ein Skalar* λ *aus den ganzen Zahlen zu.*

Bevor wir lernen werden, Determinanten auszurechnen – und das ist wirklich nicht schwer – wollen wir zuerst überlegen, welche geometrische Bedeutung dieser aglebraischen Größe innewohnt. Dafür zerlegen wir das Skalar λ in sein Vorzeichen und seinen Betrag:

$$\det(\underline{A}) = \lambda = \pm|\lambda|$$

Was bedeutet nun das Vorzeichen und was der Betrag?

- Das Vorzeichen gibt die *Änderung* der Orientierung der Vektoren im Raum durch die Matrix an. Ein positives Vorzeichen bedeutet, dass die Orientierung erhalten bleibt; ein negatives Vorzeichen entspricht also einer Änderung der Orientierung. Im zweidimensionalen können wir uns die Orientierung anschaulich folgendermaßen vorstellen: Zwei Vektoren spannen eine Ebene auf, die sich auf einem Papier darstellen lässt. Wenn wir das Papier z. B. einfach rotieren, dann bleibt die Orientierung der Vektoren zueinander gleich. Wenn wir das Papier umflippen, dann hat sich die Orientierung geändert. Im dreidimensionalen gibt es auch einen Trick: Wir nehmen uns eine Hand (rechts oder links ist egal) und stellen die drei Vekotren mit unserem Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger dar. Nun lassen wir die Abbildung wirken. Wenn die Orientierung gleich geblieben ist, dann können wir immernoch mit unserer *ursprünglichen* Hand die drei Vekotren darstellen. Hat sich die Orientierung der Vektoren geändert, müssen wir auf unsere andere Hand wechseln. (An dieser Stelle sorry an alle Chemiker*innen die sich eine oder beide Hände weggesprengt haben.)

- Der Betrag $|\lambda|$ der Determinante gibt die *Änderung* des Flächeninhalts (für zwei Dimensionen), des Volumens (für drei Dimensionen) oder allgemein des n-dimensionalen Volumens (für n Dimensionen, wer hätt's gedacht) an. Wenn wir beispielsweise eine Fläche A, welche durch zwei Vektoren aufgespannt wird, betrachten und eine Abbildung auf die Vektoren wirken lassen, dann werden die Vektoren i.d.R. getreckt oder gestaucht sowie „verschoben". Dasselbe passiert auch mit der Fläche A. Die Determinante misst nun, wie stark – genauer: um welchen Faktor – sich der neue Flächeninhalt A' von dem ursprünglichen Flächeninhalt A unterscheidet.

Um die Bedeutung der Determinante besser zu verstehn, betrachten wir Abbildung 1. In der Mitte der Abbildung sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gezeigt, welche ein Rechteck mit dem Flächeninhal $A = 1$ aufspannen (die Seitenlängen sind nicht näher festgelegt). Wir lassen die unterschiedlichen linearen Abbildungen $\underline{A}_1$ bis $\underline{A}_4$ auf dieses Rechteck wirken, welche sowohl Einfluss auf die Orientierung sowie die Länge der Vektoren haben.

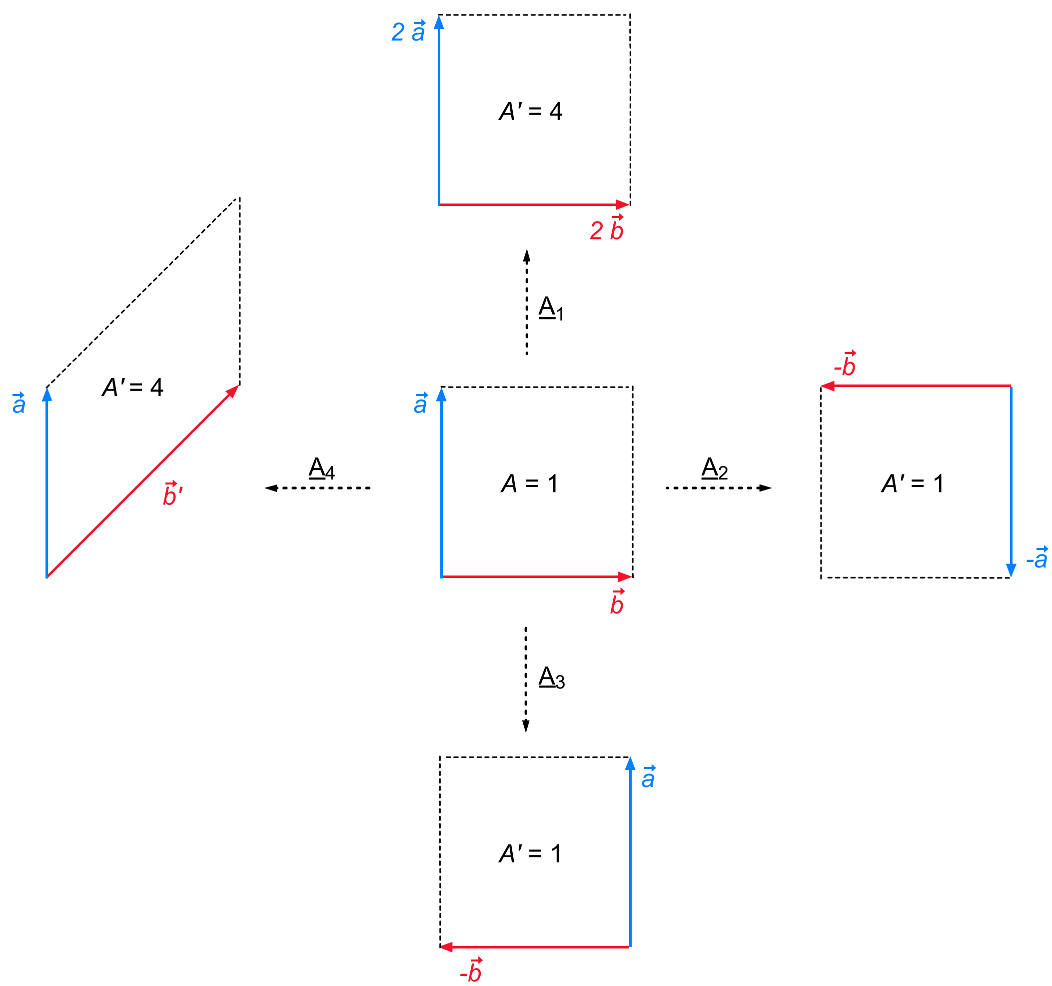

Abbildung 1: Wirkung unterschiedlicher Abbildungen auf zwei Vektoren.

Im Folgenden besprechen wir, wie die Abbildungen $\underline{A}_i$ als 2×2-Matrizen dargestellt werden können und wie deren Determinante lautet.

$\curvearrowright$ Die Abbildung $\underline{A}_1$ ist orientierungsgetreu, streckt die beiden Vektoren jedoch um den Faktor zwei. Der Flächeninhalt der neuen Fläche beträgt also $A' = 4$. Die Determinante dieser Matrix ist demnach $\det(\underline{A}_1) = +4$. Wir können uns übrigens einfach überlegen, wie die Matrixdarstellung für $\underline{A}_1$ aussehen muss. Es gilt:

$$\underline{A}_1 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ und } \underline{A}_1 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

Die Matrix, welche dies erfüllt, ist:

$$\underline{A}_1 = 2\underline{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$ Die Abbildung $\underline{A}_2$ ist längen- und orientierungsgetreu. Das die Vektoren ihre Länge beibehalten, erkennen wir schnell an dem Flächeninhalt (vgl. Abbildung 1). Die Determinante lautet $\det(\underline{A}_2) = +1$. Warum bleibt auch die Orientierung erhalten? Wir können uns einfach vorstellen, dass wir die Vektoren ausgehend vom Ursprung um 180° drehen – und eine einfache Rotation erhält die Orientierung. Wir können uns die gleiche Orientierung von zwei Vektoren zueinander auch so vorstellen: Vor dem Abbilden $\underline{A}_2$ hatten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ das identische Vorzeichen (nämlich +) und nach dem Abbilden sind Vorzeichen *beider* Vektoren immernoch gleich (jetzt −). Die Abbildung hat die folgende Matrixdarstellung:

$$\underline{A}_2 = -\underline{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$ Die Abbildung $\underline{A}_3$ ist längen- aber nicht orientierungsgetreu. Folglich muss die Determinante $\det(\underline{A}_3) = -1$ sein. Die Ausrichtung der Vektoren vor dem Abbilden nicht durch Rotieren in der Ebene der erzeugten Vektoren erreicht werden bzw. die Vorzeichen der neuen Vektoren unterscheiden sich. Die Abbildung hat die folgende Matrixdarstellung:

$$\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\curvearrowright$ Die Abbildung $\underline{A}_4$ ist nicht längengetreu, aber orientierungsgetreu. Da die Fläche vierfach vegrößert wird, ist die Determinante durch $\det(\underline{A}_4) = +4$ gegeben. Warum ist diese Abbildung nun orientierungsgetreu? Durch Rotieren der Ausgangsvektoren können wir die gezeigte Ausrichtung doch niemals erreichen. Es muss unterschieden werden zwischen Abbildungen, welche die Winkel zwischen den Vektoren oder deren Orientierung erhalten. Die Abbildungen $\underline{A}_1$bis $\underline{A}_3$ erhalten alle den Winkel, Abbildung $\underline{A}_4$ nicht. Woran erkenn wir aber nun, dass die Abbildung orientierungsgetreu ist? (Vorsicht, die Argumentation mit den Vorzeichen der Vektoren ist schwierig, da die Ausgangsvektoren nicht auf ein Vielfaches von sich abgebildet werden.) Der Ausgangsvektor $\vec{b}$ ist rechts von $\vec{a}$, genauso wie der Ergebnisvektor $\vec{b}'$ rechts von dem Bildvektor $\vec{a}$ liegt. Das ist auch für die Abbildungen $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ der Fall, wo der rote Vektor rechts von dem blauen anzutreffen ist, d. h. hier bleibt die Orientierung erhalten. Bei $\underline{A}_3$ liegt die Abbidung von $\vec{b}$ (rot) links neben der Abbildung von $\vec{a}$ (blau), dementsprechend bleibt die Orientierung nicht erhalten. Einige werden nun aufschreien und sagen „aber der rote Ergebnisvektor von $\underline{A}_2$ liegt doch auch links neben dem blauen Ergebnisvekotor.“ Falsch! Die Täuschung liegt darin, dass die blauen Ergebnisvektoren der anderen Abbildungen in die selbe Richtung wie der ursprüngliche Vektor $\vec{a}$ zeigen. Bei $\underline{A}_2$ allerdings ist der blaue Ergebnisvektor gerade entgegengesetzt ausgerichtet. Wir müssen die beiden durch $\underline{A}_2$ entstandenen Vektoren so drehen, dass mindestens einer der beiden Vektoren in die gleiche Richtung wie sein Ursprungsvektor zeigt. Wir sehen, dass das Urbild (Vektoren vor dem Abbilden) und das Bild (Vektoren nach dem Abbilden) durch eine Rotation von 180° in der Ebene die gleiche Richtung einnehmen. Zum Abschluss schreiben wir noch die Matrixdarstellung von $\underline{A}_4$ auf (wer ein wenig Knobeln will, kann sich die Darstellung selbst überlegen – so schwer ist das nicht):

$$\underline{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Berechnung der Determinante

Nun zum einfacheren Teil dieses Themas: der Berechnung der Determinante. Für 2×2 und 3×3 Matrizen ist die Bestimmung besonders einfach, weil es für diese Typen ein simples Rechenrezept gibt. Für „größere“ Matrizen, also 4×4 oder im allgemeinen $n \times n$ Matrizen, wird die Determinante durch den LAPLACE’schen Entwicklungssatz bestimmt.

Doch zuerst schauen wir uns die einfachen Rechenregeln an.

Regel (Berechnung einer 2×2 Determinante):

Die Determinante einer 2×2 Matrix ist gegeben durch:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

Wir rechnen also ganz einfach das Produkt der Hauptdiagonalelemente minus das Produkt der Nebendiagonalelemente.

Beispiel (Berechnung einer 2×2 Determinante):

Wir betrachten die Determinante $\underline{A}_4$ aus dem vorangegangenen Teil und finden:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$$

Regel von SARRUS (Berechnung einer 3×3 Determinante):

Die Determinante einer 3×3 Matrix ist gegeben durch:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - (gec + hfa + idb)$$

Eine Merkhilfe zur Berechnung von Determinanten mit der Regel von SARRUS ist in Abbildung 2 gegeben.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - (gec + hfa + idb)$$

Abbildung 2: Merkhilfe für die Regel von SARRUS.

Beispiel (Berechnung einer 3×3 Determinante):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 2+0+2-(2+6+0) = -2$$

So, jetzt wird es zugegebenermaßen etwas kompliziert. Wir schauen uns erstmal an, wie man formal $n \times n$-Matrizen berechnet und machen das ganze dann nochmal verständlich für eine 4×4-Matrix (größer wird's i. d. R. nicht).

LAPLACE'scher Entwicklungssatz: *Gegeben sei die Matrix* $\underline{\mathrm{A}}$ *vom Typ* $n \times n$. *Die Determinante* $\det\left(\underline{\mathrm{A}}\right)$ *kann bestimmt werden durch die Entwicklung nach der* i*-ten Spalte mittels*

$$\det\left(\underline{\mathrm{A}}\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det\left(\underline{\mathrm{U}}_{ij}\right)$$

oder durch die Entwicklung nach der j*-ten Spalte durch*

$$\det\left(\underline{\mathrm{A}}\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det\left(\underline{\mathrm{U}}_{ij}\right)$$

Dabei heißt $\underline{\mathrm{U}}_{ij}$ *die Streichmatrix und* $\det\left(\underline{\mathrm{U}}_{ij}\right)$ *die Unterdeterminante von* $\underline{\mathrm{A}}$.

Tatsächlich müssen wir den Satz gar nicht weiter genauer analysieren, um zu verstehem, wie wir die Determinante einer 4×4-Matrix bestimmen können. Ein Beispiel hilft bei dem Verständnis.

Beispiel (Berechnung einer 4×4 *Determinante):*

Gegeben sei die Matrix $\underline{\mathrm{A}}$ als:

$$\underline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Um nun $\det\left(\underline{\mathrm{A}}\right)$ zu berechnen suchen wir uns entweder eine Zeile oder Spalte aus. Weil wir klug sind ☺ wählen wir die Zeile/Spalte, in der die *meisten* Nullen auftreten. Das wäre dann die zweite Spalte. Diese markieren wir (hier: grau)! Dann starten wir von dem ersten Matrixelement (hier: zwei) und geben diesem ein +. Dann bewegen uns zur markierten Spalte und „laufen" diese entlang, immer abwechseld −, +, ... verteilend, bis jedes Element der markierten Spalte ein Vorzeichen erhalten hat. Wir haben bisher Folgendes geleistet:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2^{+} & -1^{-} & 4 & 2 \\ 1 & 0^{+} & 2 & 1 \\ 3 & 0^{-} & -2 & -1 \\ 0 & 2^{+} & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Nun ist die Vorarbeit geleistet und wir können die Matrix berechnen. Weil wir eine Spalte markiert haben, starten wir nun bei der ersten *Zeile* (wären wir bei einer Zeile gestartet müssten wir eine Spalte wählen). Wir *streichen* die erste Zeile und die markierte Spalte und schreiben die verbliebene 3×3 Matrix auf. Wenn wir die Matrix in eine Determinante „stecken" und mit dem Vorfaktor der $+1$ versehen, haben wir die erste Unterdeterminante $\underline{U}_{12}$ errechnet. Die Indizes 1 und 2 stehen dafür, dass wir die erste Zeile bzw. die zweite Spalte durchgestrichen haben. Die $+1$ entsteht, indem wir das erste Element der markierten Spalte nehmen und mit dem Vorfaktor $-$ multiplizieren.

$$\det\left(\underline{U}_{12}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Das ganze wiederholen wir für alle weiteren Zeilen, wobei wir die markierte Spalte durchgängig festhalten. die Unterdeterminanten $\underline{U}_{22}$ und $\underline{U}_{32}$ müssen wir dabei garnicht ausrechnen, weil die Vorfaktoren Null sind (deshalb haben wir eine Zeile/Spalte mit möglichst vielen Nullen gewählt – es spart Rechenarbeit). Schließlich bleibt nur noch $\underline{U}_{42}$ zu bestimmen:

$$\det\left(\underline{U}_{42}\right) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem LAPLACE'schen Entwicklungssatz gilt nun:

$$\det\left(\underline{A}\right) = \det\left(\underline{U}_{12}\right) + \det\left(\underline{U}_{42}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Unterdeterminanten sind mit der Regel von SARRUS auszurechnen. Wir finden (rechnet zur Übung nach!), dass $\det\left(\underline{U}_{12}\right) = \det\left(\underline{U}_{42}\right) = 0$ ist, d. h. es gilt auch $\det\left(\underline{A}\right) = 0$.

Puh, geschafft! Nun können wir in der Theorie beliebig große Determinanten aurechnen. (Die Determinante einer 5×5 lässt sich etwa als eine Summe von Unterdeterminanten des Typs 4×4 darstellen, die man dann weiter in 3×3 Determinanten zerlegen und mit der Regel von SARRUS ausrechnen kann – praktisch kommt nichts größeres als eine 4×4 Matrix vor.) Aber es ist schon das nächste Problem aufgetaucht: was bedeutet es, wenn die Determinante gleich Null ist? Das klären wir im dritten Abschnitt.

3 Eigenschaften der Determinante

Erinnern wir uns an Abschnitt 1 zurück. Die Deteriminante gibt die *Änderung* des n-dimensionalen Volumens an. Nehmen wir an wir haben einen Körper mit einem Volumen V, der durch drei Vektoren aufgespannt wird. Durch eine Abbildung $\underline{A}$ kann dieser dreidimensonale Körper auf eine Fläche projiziert werden. Dies ist in Abbildung 3 dargestellt. Das Volumen einer Fläche ist Null ☻. Demnach muss auch $\det\left(\underline{A}\right) = 0$ gelten.

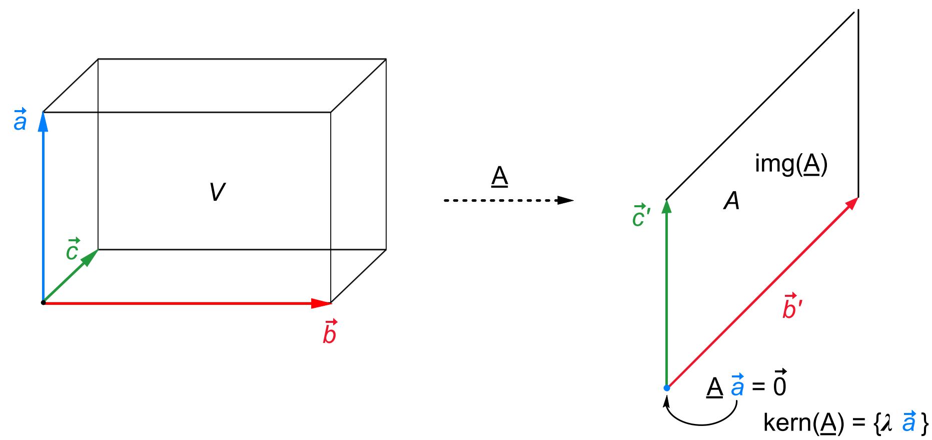

Abbildung 3: Abbildung eines Parallelpipeds auf eine Fläche.

Wenn wir Abbildung 3 betrachten, dann erkennen wir, dass die Determinante ein nützliches Werkzeug darstellt, um Aussagen über die lineare Abhängigkeit quadratischer Matrizen zu treffen.

Eine kleine Wiederholung:

Wenn wir die Vektoren des Parallelpipeds in eine Matrix $\underline{B}$ schreiben, dann ist die Dimension dieser Matrix durch die Anzahl linear unabhängiger Spalten gegeben. Die Dimension ist in diesem Fall anschaulich zu verstehen – wenn wir einen dreidimensionalen Körper aufspannen wollen brauchen wir drei *linear unabhänhige* Vektoren, d. h. es gilt $\dim\left\{\underline{B}\right\} = 3$. Da wir unsere Abbildung auf das Parallelpiped wirken lassen möchten, muss unsere Abbildung $\underline{A}$ ebenfalls dreidimensional sein. Das Bild ist das, was wir nach Ausführen von $\underline{A}$ „noch sehen“. Wir erkenn in Abbildung 3, dass das Bild einen Vektor weniger aufweist und wir unseren Körper – nun eine Fläche – nur noch mit zwei Vektoren aufspannen. Daher ist $\dim\left\{\mathrm{img}\left(\underline{A}\right)\right\} = 2$. Was ist mit Vektor $\vec{a}$ passiert? Er wurde durch die Abbildung auf den Nullvektor $\vec{0}$projiziert. Man bezeichnet die Vektoren, welche auf $\vec{0}$ abbgebildet werden als $\mathrm{kern}\left(\underline{A}\right)$. Der Name Kern ist einfach verständlich, denn wir ordnen einem Vektor (mit seinen Vielfachen eine Gerade, also ein eindimensionales Objekt) einem einzelnen Punkt (einem nulldimensionalen Objekt, einem Punkt⇔„Kern“) zu. Die Dimension des Kernes $\dim\left\{\mathrm{kern}\left(\underline{A}\right)\right\}$ wird auch als Defekt bezeichnet, denn dieser gibt an, wie viele Dimensionen beim Abbilden „verloren gehen“. Der Defekt der Abbildung $\underline{A}$ ist gleich 1.

Warum diese Wiederholung? Nunja, wir können nun den Defekt mit der Determinante in Beziehung setzen. Betrachten wir den Fall, in dem wir einen Defekt haben:

„Richtung LGS“:Der Defekt einer Abbildung ist ungleich Null $\Rightarrow$ Die Spalten der Matrix sind linear abhängig $\stackrel{fur LGS}{\Longrightarrow}$ LGS nicht eindeutig lösbar $\Rightarrow$ Die Matrix hat kein Inverses.

„Richtung Determinante“: Der Defekt einer Abbildung ist ungleich Null $\Rightarrow$ Wir verlieren eine Dimension $\Rightarrow$ Die Determinante ist Null.

Umgekehrt liegt kein Defekt vor, wenn wir eine Determinante ungleich Null haben. Wir sehen, dass wir durch das Ausrechnen der Determinante sehr viele Informationen zu dem interessierenden Problem, z. B. der Lösbarkeit eines LGS, vorwegnehmen können: ist die Deterimnate Null, ist das LGS nicht eindeutlig lösbar, andernfalls schon.