Algebraische Abgeschlossenheit

Wir haben in der ersten Vorlesung gelernt, dass sich ein Polynom als Summe von Monomen x^0, x^1, x^2, x^3 ... mit Vorfaktoren a_0, a_1, a_2, a_3 ... schreiben lässt. Kennt man die Nullstellen x_1, x_2, x_3 ... dieses Polynoms, so kann man es aber auch als Produkt von Linearfaktoren schreiben. In Formelsprache ausgedrückt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k = \; a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Diese Formel (der höchste Koeffizient a_n darf nicht Null sein) funktioniert nur dann, wenn man einen Zahlenbereich zugrunde legt, der auch alle Nullstellen des Polynoms umfasst. Wie Sie bereits auf dem ersten Übungszettel herausgefunden haben, reichen rationale und reelle Zahlen dazu nicht aus. Die Formel gilt nur dann, wenn alle darin vorkommenden Größen komplexe Zahlen sein dürfen.

Dass jedes Polynom (mit komplexen Koeffizienten) "vollständig in Linearfaktoren zerfällt", d.h. dass die obige Formel gilt, beweisen Studierende der Mathematik erst im vierten Semester Mathematik. Sie nennen den Körper der komplexen Zahlen daher auch "algebraisch abgeschlossen".

Auch endliche Körper kann man so erweitern, dass sie algebraisch abgeschlossen sind... Das geht aber jetzt über die Vorlesung weit hinaus.