FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Zusatzzettel „allgemeine Definition des Skalarproduktes“

Lernziel: Das Skalarprodukt über seine Rechenregeln definieren.

Das in der Vorlesung behandelte Skalarprodukt heißt in der Literatur auch „Standardskalarprodukt“, denn ein Skalarprodukt ist viel allgemeiner definiert. Wenn man betonen will, dass man nicht das Standardskalarprodukt, sondern die allgemeine Definition meint, dann schreibt man in der Literatur statt $a^T b$ stets die Klammerschreibweise $\langle a, b \rangle$.

Definition: Ein Skalarprodukt (inneresProdukt) in einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist eine „symmetrische positiv definite Bilinearform“$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass für alle Vektoren $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) (Linearität) $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$.

(ii) (Symmetrie) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(iii) (pos. Definitheit) $\langle x, x \rangle \geq 0$ und Gleichheit gilt nur, wenn $x = 0$.

Der Begriff „bilinear“ kommt dadurch zustande, dass man sich klar macht, dass die Eigenschaft (i) kombiniert mit der Symmetrie (ii) bedeutet, dass das Skalarprodukt „in beiden Komponenten“ linear, also bilinear, ist.

Für das Standardskalarprodukt sind obige Eigenschaften alle erfüllt. Insbesondere folge die Linearität aus der Tatsache, dass das Standardskalarprodukt ja „nur“ eine besondere Form der Matrixmultiplikation darstellt, die bekanntlich eine lineare Abbildung ist.

Ein Vektorraum, in dem es ein Skalarprodukt gibt (und nur solche behandeln wir in der Vorlesung), heißt auch **euklidischer Vektorraum.**