Oft wird in den Grundvorlesungen der Mathematik in naturwissenschaftlichen Fächern der Begriff „Ableiten/Differenzieren“ (für eindimensionale Funktionen) eingeführt und darauf hingewiesen, dass man zwischen differenzierbaren und nicht-differenzierbaren Funktionen unterscheiden muss. Man lernt, dass Funktionen mit Unstetigkeiten (Sprünge, Polstellen, Dirac-δ-Funktion…) oder Knicken nicht-differenzierbar sind.

Der Grund hierfür ist, dass der Ableitungsbegriff auf der Grenzwertbetrachtung von Cauchy aufbaut. Hier kann es sein, dass die definierten Folgen keinen (eindeutigen) Grenzwert besitzen und somit die Ableitung in bestimmten Fällen nicht hierüber definiert werden kann.

In der modernen Mathematik wurden aber schon sehr oft alternative Definitionen der „Ableitung“ angegeben (in den 1920ern durch Fréchet, den 1930ern durch Radon und Nikodým, in den 1960ern durch Robinson, in den 1970ern durch Rockefellar), so dass es fast keine Funktion mehr gibt, die nicht-differenzierbar ist. Unstetigkeitsstellen und Knicke stellen gar kein Problem dar und müssen nicht gesondert behandelt werden. Ich verwende den Begriff „nicht-differenzierbar“ in meiner Vorlesung daher nicht. Meine „Lieblingsdefinition“ von einer Ableitung lautet übrigens:

$$f'(x) = \left\{ \frac{f(x+\alpha) - f(x+\beta)}{\alpha - \beta};\ \ \alpha, \beta \text{ infinitesimal, mit } \alpha \neq \beta \right\}$$

Sollte die Funktion nach der „herkömmlichen“ Grenzwert-Definition differenzierbar sein, dann ist sie es auch nach der neuen Definition. Als Beispiel:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \left\{\frac{(x+\alpha)^2 - (x+\beta)^2}{\alpha - \beta}\right\}_* = \{2x + \gamma\}_{\gamma \neq 0, \text{infinitesimal}}$$

Dabei ist $\gamma=\alpha+\beta$. Der Standardteil dieser Menge ist 2x, die altbekannte Ableitung von x^2.

Eine Unstetigkeitsstelle kann auch über die obige Definition einer Ableitung behandelt werden. Als Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{für } x \neq 0 \\ r, \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \left\{0, \frac{1}{\gamma}\right\}_{\gamma \neq 0, \text{infinitesimal}}$$

Dabei darf r auch (wie bei Dirac) eine konstante infinite Zahl sein. Der Standardteil dieser Menge ist 0, was man als reellwertige Ableitung einer solchen Funktion sehen könnte. Eine Polstelle macht jedoch in den reellen Zahlen immer noch „Probleme“. Zum Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, \text{für } x \neq 0 \\ 0, \text{für } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \left\{\frac{1}{\gamma}\right\}_{\gamma \neq 0, \text{infinitesimal}}$$

Hier wäre der Standardteil eine leere Menge.

Interessant ist das Verhalten bei einem Knick. Hier wird der Vorteil bei der mengenbasierten-Definition deutlich. Zum Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{für } x > 0 \\ x^2, \text{für } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha + \beta} \right\}_{\substack{\alpha,\beta \text{ infinitesimal} \\ \alpha,\beta \geq 0, \alpha+\beta \neq 0}}$$

Geht man in diesem Beispiel zum Standardteil dieser Menge über, dann sieht man über die Setzung $\alpha = t\gamma$ und $\beta = (1-t)\gamma$, dass das Intervall [0;1] als Standardteil gefunden wird. Dieses entspricht dem „Subgradient“ dieser Funktion. Auch für nicht-konvexe Funktionen lässt sich aber eine Ableitung definieren:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{für } x \leq 0 \\ x^2, \text{für } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta}{\alpha - \beta} \right\}_{\substack{\alpha,\beta \text{ infinitesimal} \\ \alpha,\beta \geq 0, \alpha \neq \beta}}$$

Der Standardteil umfasst alle reellen Zahlen, ausgenommen ist jedoch das offene Intervall]0;1[.