Lösung zum Block II der Probeklausur zur Vorlesung Analysis II (lehramt)

Beispiellösung von K. Fackeldey & M. Weiser

Analysis II (lehramt) (SS 2012)

II.a)

Der Integrand beinhaltet die Terme $x^{1/2}$ und $x^{1/3}$, somit benutzen wir die Substitution:

$$u = x^{1/6} \iff x = u^6 \text{ und } \frac{dx}{du} = 6u^5.$$

Wir erhalten dann

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{(u^6)^{1/2}}{1+(u^6)^{1/3}}(6u^5)du = 6\int \frac{u^8}{1+u^2}du.$$

Eine Division bringt uns die folgende Darstellung:

$$\frac{u^8}{1+u^2} = u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}.$$

Also:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx \qquad &= 6\int u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6\arctan(u) + C \\ &= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\arctan(x^{1/6}) + C\end{aligned}$$

Wobei wir in der vorletzten Zeile den Hinweis $\int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u$ benutzt haben.

II.b)

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y - 4x^3 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y^3$$

Durch Nullsetzen dieser beiden Gleichungen bekommt man die kritischen Punkte. Also

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)4y - 4x^3 = 0 \qquad \iff y = x^3 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y^3 \qquad \iff x = y^3 \tag{2}$$

Durch Substitution von (1) in (2) erhält man $x = (x^3)^3 \iff x(x^8-1) = 0$ was uns die Lösungen $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$ bringt. Dies wiederum in (1) eingesetzt ergibt $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1$.

Wir haben somit die kritischen Punkte $(0,0); (1,1); (-1,-1)$. Berechne nun Hessematrix um Maximum/Minumum oder Sattelpunkt zu identifizieren:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = -12x^2 \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = -12y^2 \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4.$$

Die Berechnung der Determinante (also $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial y}^2$) ergibt für Punkt $(0,0)$ den Wert -16, für Punkt $(1,1)$ den Wert 128 und für Punkt $(-1,-1)$ den Wert 128. Somit liegt bei den Punkten $(1,1)$ und $(-1,-1)$ jeweils ein relatives Maximum vor und bei $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

II.c)

Es ist

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \cos z & x \cos y \cos z & -x \sin y \sin z \\ \sin y \sin z & x \cos y \sin z & x \sin y \cos z \\ \cos y & -x \sin y & 0 \end{pmatrix}.$$