Zuse Institut Berlin
Freie Universität Berlin
Dr. K. Fackeldey, Dr. M. Weiser

Analysis II
SoSe 12

Probeklausur zur Analysis II (lehramtsbezogen)

Name:____________________________ Vorname:____________________ Matr.-Nr.: __________________

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Lösungen sind in gut lesbarer Reinschrift mit allen Nebenrechnungen auf DIN A4–Blättern abzugeben. Alle Blätter bitte mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer versehen!
Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Lösungen werden nicht gewertet.

Block I [12 Punkte]
Kreuzen Sie bei wahren Aussagen „wahr“ an, bei falschen „falsch“ . Enthält eine Zeile keine sinnvolle Aussage, kreuzen Sie gar nichts an. Für jede korrekt bearbeitete Zeile erhalten Sie einen Punkt.

	wahr	falsch	Aussage
1.	☐	☐	Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0 \ \forall x \in D$. Dann folgt $\int_a^b f(x) < 1$.
2.	☐	☐	Jede kompakte Mengen M is abgeschlossen und stetig.
3.	☐	☐	Sei $x \in \partial M$, dann gilt für jede Umgebung $U_\epsilon(x), \epsilon > 0$, dass $U_\epsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ und $U_\epsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset$.
4.	☐	☐	Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ mit Häufungspunkt a, dann hat die Menge $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls den Häufungspunkt a.
5.	☐	☐	Monotone Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
6.	☐	☐	Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$.
7.	☐	☐	Jede gewöhnliche Differentialgleichung ist eindeutig lösbar.
8.	☐	☐	Zu jedem Punkt $x \in M$ in einer offenen Menge M existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert ∂M.
9.	☐	☐	Ist x Nullstelle von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f'(x)$ singulär, so konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch gegen x.

Geben Sie ohne Begründung oder Beweis jeweils an:

a) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, die weder offen noch abgeschlossen ist.

b) Ein Anfangswertproblem, dessen Lösung $y(t)$ für alle $t > 0$ existiert.

c) Eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\max_{x\in[0,1]} f(x) > 0$ und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Dieses Feld bitte nicht beschriften!

Teil	I	IIa	IIb	IIc	IIIa	IIIb	$\sum$
Punkte							
Korrektor							

Block II [18 Punkte]
Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenabschnitte a), b) und c).

a) Lösen Sie das folgende Integral:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$$

b) Es sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to R$ gegeben durch

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4.$$

Berechnen Sie die Extema und Sattelpunkte dieser Funktion.

c) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\sin(y)\cos(z) \\ x\sin(y)\sin(z) \\ x\cos(y) \end{pmatrix}$$

Block III [10 Punkte]
Beweisen Sie die beiden folgenden Sachverhalte.

a) Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit

$$\|g(x) - g(y)\| \geq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n, \quad L > 1.$$

Dann kann g höchstens einen Fixpunkt haben.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, so existiert ein $\lambda > 0$ mit

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \quad v^T Av \geq \lambda\|v\|^2.$$