1

<u>Was ist denn nun eigentlich so ein Differential?</u>

Der Definition 5.7 zur totalen Differenzierbarkeit können wir entnehmen, daß das Differential eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist, wobei

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + o(h)$$

ist.

Übersetzen wir das erstmal in den eindimensionalen Fall:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h \qquad , x \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R},$$

dann finden wir also in einer Umgebung von x eine Gerade g s.d.

$$\frac{f(x+h) - g(x+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad .$$

D.h. eine differenzierbare Funktion f kann in einer Umgebung von x durch eine Gerade g so angenähert werden, daß die Differenz $f(x) - g(x)$ bei ~~Annäherung~~ Annäherung an x von mindestens erster Ordnung verschwindet.

Im zweidimensionalen Fall suchen wir eine Ebene G s.d.

$$G(x+h) = f(x) + L \cdot h.$$

Jetzt ist jedoch $x = (x_1, x_2)$ und $h = (h_1, h_2)$ also

$$G(x+h) = f(x) + L_1 \cdot h_1 + L_2 h_2$$

mit

$$\frac{f(x_1+h_1, x_2+h_2) - G(x_1+h_1, x_2+h_2)}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0.$$

Wenn nun, wie vorausgesetzt f differenzierbar in $x = (x_1, x_2)$ ist, dann ex. partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(x+h) = L_1 \quad \text{und} \quad \partial_y f(x+h) = L_2$$

also ist $L = Df(x+h)$.

Man mache sich klar, daß das Differential L eine lineare Abbildung ist.