

①

0. Wiederholung (Analysis I ... eine Auswahl)

GRENZWERT !

Def (Grenzwert einer Folge)

Eine Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n)

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt,
s.d. für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|a - a_n| < \varepsilon.$$

oder:

a - Grenzwert von Folge (a_n)

$$! \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Sätze über Folgen:

- Jede konvergente Folge ist beschränkt
- Jede monotone und beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.
- Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß)

②

Def (Cauchy-Folge)

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, wenn

zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ex. mit

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Satz (Konvergenz krit. v. Cauchy)

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

~~konvergent~~

Def (Stetigkeit)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $a \in D$.

Die Funktion f heißt stetig in a , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$

ein $\delta > 0$ ex. mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \quad \text{mit } |x - a| < \delta$$

kurz: f -stetig in a

$$: \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(3)

Def (gleichmäßige Stetigkeit)

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ex. mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

kurz:

f -glm. stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \forall y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Def (punktweise Konvergenz)

Es sei K eine Menge und seien $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Funktionen.

(f_n) auf $K \subseteq \mathbb{R}$ punktweise konvergent

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall x \in K \exists n_0 \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ gilt.}$$

(4)

Def (gleichmäßige Konvergenz)

Es sei K eine Menge und seien $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \in \mathbb{N}$ Funktionen

(f_n) auf $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig konvergent

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in K: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$